

1 Pour s'entraîner : calculs de développements limités

68 1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + e^x - \cos(x)$ à l'ordre 3 en 0.

2. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

3. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

4. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sin(2x^2)$ à l'ordre 5 en 0.

5. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 en 0.

69 1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \exp(x)$ à l'ordre 3 en 2.

2. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \ln x$ à l'ordre 2 en 3.

3. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 en $\pi/2$.

4. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4.

70 Déterminer le développement limité de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.

71 En se rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de \tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois jusqu'à obtenir le $DL_5(0)$ de \tan .

2 Étude locale des fonctions en un point

72 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$.

73 On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^4}$. Calculer $\varphi^{(5)}(0)$.

74 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

75 Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\cos(x) - e^x}{x}$$

- Démontrer que f admet une limite en 0. On notera encore f le prolongement par continuité de f .
- Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en 0.
- Quelles sont les positions relatives de T et de \mathcal{C}_f au voisinage de 0?

76 1. Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}$$

- En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f le prolongement par continuité de f en 0. Que vaut $f(0)$?
- Justifier que la fonction f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe \mathcal{C}_f représentant la fonction f , puis déterminer la position relative au voisinage de 0 de \mathcal{C}_f par rapport à T .

77 Soit f la fonction définie par :

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2}$$

- Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
- Quelle est alors la position relative, au voisinage de 0, de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

3 Étude locale des fonctions en l'infini

78 Soit f la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = e^{1/x} \sqrt{x(x+2)}.$$

Démontrer l'existence d'une asymptote (D) en $+\infty$ à la courbe \mathcal{C}_f représentant f et déterminer son équation, ainsi que la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

79 Considérons la fonction

$$f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Démontrer que la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$. Déterminer l'équation de (D) et préciser la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

4 Pour travailler seul

80 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}.$$

- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ .
- En déduire la limite ℓ de φ en 0.
- On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

- (a) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .
- (c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse 0 et la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (T) au voisinage de 0.

4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

- (a) À l'aide de la question 1, démontrer que la courbe représentative \mathcal{C}_g de la fonction g admet une asymptote oblique $\mathcal{D}_{+\infty}$ en $+\infty$. Préciser l'équation de $\mathcal{D}_{+\infty}$, ainsi que la position relative de \mathcal{C}_g par rapport à $\mathcal{D}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$.
- (b) Démontrer, de même, que \mathcal{C}_g admet une asymptote oblique $\mathcal{D}_{-\infty}$ en $-\infty$. Préciser l'équation de $\mathcal{D}_{-\infty}$, ainsi que la position relative de \mathcal{C}_g par rapport à $\mathcal{D}_{-\infty}$ au voisinage de $-\infty$.

81

- Rappeler, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$.
- Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\cos x}.$$

3. On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t} dt.$$

Justifier que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Démontrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
- (a) On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g . Déduire de la question précédente l'équation de la tangente (T) à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
(b) Déterminer la position relative de \mathcal{C} par rapport à (T) au voisinage de 0.

1 Reconnaître une application linéaire

82 Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ? Justifier.

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y, z)$
- $f_2 : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont fixés
 $M \mapsto AM - MA$
- $f_3 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$
 $(x, y) \mapsto (x - 2y, x + y, 3y)$
- $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto xy$

83 On considère l'application

$$f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y - 4z \\ x + y + 2z \\ -z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX.$$

- En déduire que f est un endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- L'application f est-elle bijective ?

2 Image et noyau

84 On considère l'application : $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto P' - P(0).$

- Démontrer que φ est linéaire.
- Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.

- Calculer $\varphi(X + 1)$.
- En déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

85 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$f(1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(0, 0, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- Déterminer $\text{rg}(f)$.

86 On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P(X) \mapsto XP'(X).$

- Déterminer une base du noyau de φ .
- Déterminer une base de l'image de φ .
- Vérifier que le résultat est cohérent à l'aide du théorème du rang.

87 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, y - z).$

- Démontrer que f est linéaire.
- (a) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
(b) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$.
- (a) L'application linéaire f est-elle injective ? Justifier.
(b) L'application linéaire f est-elle surjective ? Justifier.

88 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Notons $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_m : E \rightarrow E$$

$$P \mapsto X^2 P'' - (2m - 1) X P' + m^2 P.$$

- Démontrer que l'application f_m est linéaire.
- Calculer $f_m(X^k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.
- En déduire une base et la dimension de $\text{Im}(f_m)$ puis la dimension et une base de $\text{Ker}(f_m)$ en fonction du paramètre m .

89 Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (2x, -2x - y - z, 2y + 2z).$$

- Démontrer que f est linéaire.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

90 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires.

- Démontrer l'inclusion : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- Démontrer l'inclusion : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
- Établir l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im}f \subset \text{Ker}g.$$

3 Pour travailler seul

91 On considère l'application linéaire

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, 2y - x, x + 3y).$$

- Déterminer $\dim(\text{Ker}(f))$.
- Déterminer $\dim(\text{Im}(f))$.

92 Calculer $f(1, -2, -1)$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ est l'application linéaire définie par :

$$f(1, 0, 0) = -X + X^2, \quad f(0, 1, 0) = X, \quad f(0, 0, 1) = 1 + 3X^3.$$

93 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1 + X + X^2) = (1, -2), \quad f(X) = (1, 1), \quad f(1 - 2X^2) = (3, 1).$$

- Calculer $f(3X^2)$.
- f est-elle surjective ?
- f est-elle injective ?

94 *Final Automne 2020.* Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)).$

- Démontrer que f est linéaire.
- (a) Calculer $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)$.
 (b) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- (a) Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$.
 (b) Déduire des questions précédentes la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- (a) Calculer $f(X - X^3)$.
 (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.