Mathématiques - Première partie

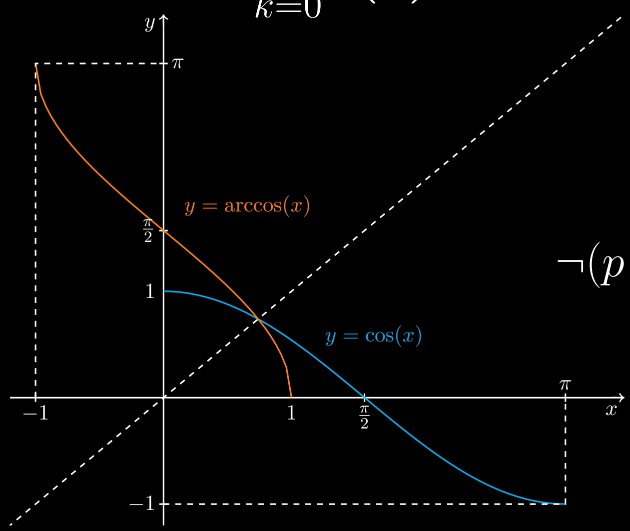
Algèbre et Analyse

Cours écrit par Alexis Flesch et Karine Mauffrey

Automne 2020

Version étudiant·e

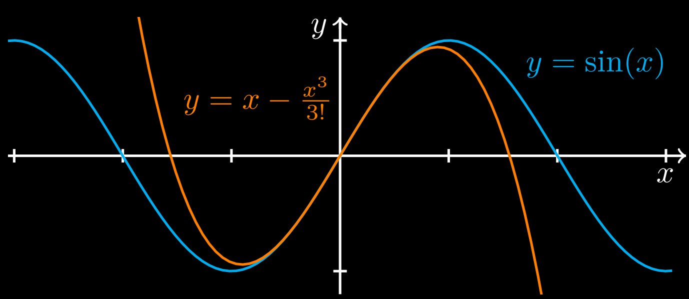
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



$$\zeta_k = |a|^{1/n} \mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$$

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Table des matières

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- traduire un énoncé à l'aide de quantificateurs,
- écrire la négation d'une assertion,
- distinguer les notions de condition nécessaire et condition suffisante,
- distinguer les différents types de raisonnements (disjonction de cas, contraposée, raisonnement par l'absurde, analyse-synthèse, récurrence).

I Symboles ensemblistes

I.1 Notions d'ensemble et d'élément

Définition 1.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 1.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 1.3. L'ensemble constitué des entiers 0 et 1 est noté $\{0; 1\}$.

Définition 1.4. Soient E et F deux ensembles. On dit qu'ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 1.5. Il n'y a pas nécessairement de relation d'ordre dans un ensemble. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{0; 1\} = \{1; 0\}$.

Définition 1.6. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Remarque 1.7. L'ensemble $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide : c'est un ensemble constitué d'un seul élément, cet élément étant l'ensemble vide.

Définition 1.8. Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection** de E et de F l'ensemble $E \cap F$ dont les éléments sont les éléments communs à E et à F.
- On appelle **réunion** de E et de F l'ensemble $E \cup F$ dont les éléments sont les éléments de E et les éléments de F.

Exemple 1.9. Soient E et F les ensembles définis par $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ et $F = \{0; 2; 4; 6\}$. Alors :

$$E \cap F = \{0; 2; 4\}, \qquad E \cup F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Exemple 1.10. Notons $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs. Alors $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 1.11. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Exemples 1.12. $\{1; 2\} \subset \{1; 2; 3\}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

II Rudiments de logique

II.1 Assertions

Définition 1.13. Une **assertion** est un énoncé mathématique défini sans ambiguïté et pouvant être vrai (V) ou faux (F).

Exemples 1.14. Les énoncés suivants sont des assertions :
- $P_1 : 1 \leqslant 2$;
- $P_2 : 0 < 0$.
- P_3 : Le nombre 2^{13} est un entier positif.
- P_4 : Si x est un nombre réel négatif, alors sa valeur absolue est égale à x.

Exemple 1.15. La phrase «$f(x) = x^2$ est croissante» n'est pas une assertion car la fonction f est mal définie (suivant son espace de départ, cette phrase peut être vraie ou fausse).

Remarque 1.16. Il arrive qu'une assertion P dépende d'un paramètre x (ou de plusieurs paramètres $x, y, z, \ldots$), on la notera dans ce cas $P(x)$ (ou $P(x, y, z, \ldots)$) au lieu de P.

Exemples 1.17. Les énoncés suivants sont des assertions :
- $P_1(x) : x \geqslant 0$;
- $P_2(a, b) : a + b = 0$.

Définition 1.18. Deux assertions P et Q ayant les mêmes valeurs de vérité sont dites **synonymes**. On note $P \equiv Q$ lorsque P et Q sont synonymes.

Exemple 1.19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors les assertions suivantes sont synonymes :
- $P(n)$: « n est pair » ;
- $Q(n)$: « $n + 1$ est impair ».

II.2 Négation

Définition 1.20. La **négation** d'une assertion P est l'assertion prenant la valeur **Fausse** lorsque P est **Vraie** et inversement. On la note $\text{non}(P)$ (ou encore $\neg P$ ou $\overline{P}$).

Exemple 1.21. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P(x) : x \geqslant 2$, alors $\text{non}(P(x)) : x < 2$.

Remarque 1.22. On peut aussi dire que l'assertion $\text{non}(P)$ est définie à l'aide de la **table de vérité** suivante :

P	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

Proposition 1.23

Soit P une assertion, alors $\text{non}(\text{non}(P)) \equiv P$.

Démonstration. Écrivons la table de vérité correspondante.

P	$\text{non}(P)$	$\text{non}(\text{non}(P))$
V	F	V
F	V	F

□

II.3 Conjonction “et” et disjonction “ou”

Définition 1.24. Soient P et Q deux assertions. On appelle **conjonction** des assertions P et Q et on note $[P \text{ et } Q]$ (ou encore $P \wedge Q$) l’assertion qui est **Vraie** lorsque P et Q sont toutes les deux **Vraies** et **Fausse** sinon.

Remarque 1.25. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.26. Considérons les assertions :
- $P(x) : x \in \mathbb{Z}$;
- $Q(x) : x \geqslant 0$;
- $R(x) : x \in \mathbb{N}$.

Alors : $[P(x) \text{ et } Q(x)] \equiv R(x)$.

Définition 1.27. Soient P et Q deux assertions. On appelle **disjonction** de ces assertions et on note $[P \text{ ou } Q]$ (ou encore $P \vee Q$) l’assertion qui est **Fausse** lorsque P et Q sont toutes les deux **Fausses** et **Vraie** sinon.

Remarque 1.28. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 1.29. Le «ou» mathématique est **inclusif**. L’assertion $[P \text{ ou } Q]$ est vraie si l’une au moins des assertions P ou Q est vraie.

Exemple 1.30. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $P(x) : (x \geqslant -1)$ et posons $Q(x) : (x \leqslant 0)$. Alors $\big[P(x) \text{ ou } Q(x)\big]$ est une assertion qui est vraie pour tout x.

Proposition 1.31 (Lois de Morgan)

Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$\begin{aligned} \text{non}(P \text{ ou } Q) &\equiv (\text{non}(P)) \text{ et } (\text{non}(Q)), \\ \text{non}(P \text{ et } Q) &\equiv (\text{non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q)). \end{aligned}$$

Proposition 1.32 (Distributivité)

Soient P, Q et R trois assertions. Alors :

$$\begin{aligned} P \text{ et } [Q \text{ ou } R] &\equiv [P \text{ et } Q] \text{ ou } [P \text{ et } R] \\ P \text{ ou } [Q \text{ et } R] &\equiv [P \text{ ou } Q] \text{ et } [P \text{ ou } R]. \end{aligned}$$

II.4 Implication

Définition 1.33. Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \implies Q$ comme étant :
- **Vraie** lorsque P est **Fausse** ou P et Q sont toutes les deux **Vraies**,
- **Fausse** sinon.

L'assertion $P \implies Q$ se lit «P **implique** Q». On parle aussi de l'**implication** $P \implies Q$. On dit que $Q \implies P$ est l'**implication réciproque** (ou tout simplement **la réciproque**) de $P \implies Q$.

Remarque 1.34. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposition 1.35

Soient P et Q deux assertions. Alors :
- $(P \implies Q) \equiv [\text{non}(P) \text{ ou } Q]$,
- $\text{non}(P \implies Q) \equiv \big[P \text{ et } \text{non}(Q)\big]$.

Démonstration. Le résultat découle de la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$	$\text{non}(P \implies Q)$	$\text{non}(Q)$	P et $\text{non}(Q)$
V	V	V	**F**	F	**F**
V	F	F	**V**	V	**V**
F	V	V	**F**	F	**F**
F	F	V	**F**	V	**F**

□

Exemple 1.36. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :
- $P(x) : x \geqslant 2$;
- $Q(x) : x^2 \geqslant 4$.

Alors, $\big(P(x) \implies Q(x)\big)$ est vraie. Cependant, la réciproque est fausse : en effet, pour $x = -2$, on a $x^2 \geqslant 4$ et $x < 2$, donc $[Q(x) \text{ et } \text{non}(P(x))]$ est vraie, c'est-à-dire, $\text{non}\,(Q(x) \implies P(x))$ est vraie.
En revanche, si on définit l'assertion

$$R(x) : x \leqslant -2,$$

alors l'implication $\big([P(x) \text{ ou } R(x)] \implies Q(x)\big)$ et l'implication $\big(Q(x) \implies [P(x) \text{ ou } R(x)]\big)$ sont toutes les deux vraies.

II.5 Équivalence

Définition 1.37. Soient P et Q deux assertions. On note $P \iff Q$ l'assertion

$$\big[(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\big],$$

et on lit «P et Q sont **équivalentes**».

1 En s'inspirant de la démonstration précédente, écrire la table de vérité de $P \iff Q$.

Exemple 1.38. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'équivalence suivante est vraie : $x^2 = 4 \iff x \in \{-2; 2\}$.

II.6 Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Définition 1.39.
- On dit que Q est une **condition nécessaire pour** P lorsque l'implication $P \implies Q$ est vraie, autrement dit lorsque le fait que P soit vraie entraîne nécessairement le fait que Q soit vraie aussi. On dit aussi « Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie. »
- On dit que Q est une **condition suffisante pour** P lorsque l'implication $Q \implies P$ est vraie autrement dit lorsqu'il suffit que Q soit vraie pour que P le soit aussi.
- On dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante pour** P lorsque l'équivalence $Q \iff P$ est vraie autrement dit lorsque P est vraie si et seulement si Q est vraie. On dit aussi « Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie. »

2 Soit x un nombre réel. La propriété $x \geqslant 1$ est-elle une condition nécessaire pour la propriété $x^2 + x - 1 \geqslant 0$? Une condition suffisante ?

II.7 Quantificateurs

Définition 1.40. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsque $P(x)$ est **Vraie** pour tous les éléments x de E. On lit « **quel que soit** x **appartenant à** E**,** $P(x)$ ».

3 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \leqslant 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.41. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe (au moins) un élément x de E pour lequel $P(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$ ».

4 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$;
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.42. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists! x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe exactement un élément x de E pour lequel $P(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe un unique** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$».

5 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists! x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$;
- $\exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = 1$.

Remarque 1.43. On peut construire des phrases mathématiques plus compliquées mélangeant les différents types de quantificateurs. Attention à ne pas les inverser ! Par exemple, l'assertion suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n.$$

Cependant, l'assertion suivante est fausse :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \leqslant n.$$

Proposition 1.44

$$\begin{aligned}\text{non}(\forall x \in E,\ P(x)) &\equiv \exists x \in E,\ \text{non}(P(x)),\\ \text{non}(\exists x \in E,\ P(x)) &\equiv \forall x \in E,\ \text{non}(P(x)).\end{aligned}$$

Exemple 1.45. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **positive** si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$. Ainsi, f n'est pas positive ssi (si et seulement si) : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$.

6 Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **croissante** si : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\big)$. Écrire la négation de l'assertion précédente.

7 Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$. Écrire la négation de cette assertion.

III Raisonnements

III.1 Raisonnement direct ou par implication(s)

Méthode (Démonstration directe par implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$). Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer qu'elle découle de résultats déjà connus. Autrement dit, on part d'une assertion $\mathscr{Q}$ vraie et on démontre que l'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est vraie (en effectuant éventuellement une chaîne d'implications). La démonstration dut fait que l'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est vraie commence en général par « Supposons que $\mathscr{Q}$ est vraie » et se termine par « Donc $\mathscr{P}$ est vraie. »

Exemple 1.46. Démontrons que : $0 \leqslant x \leqslant 2 \implies \sqrt{x^2+5} \leqslant 3$. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \implies 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \implies 0 \leqslant x^2+5 \leqslant 9 \implies 0 \leqslant \sqrt{x^2+5} \leqslant 3.$$

Méthode (Démonstration d'une assertion $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$). Démontrer une propriété du type $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$, consiste à se donner un élément quelconque x appartenant à l'ensemble E et à démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour cet élément x. La démonstration commence toujours par « Soit $x \in E$ » ou « Soit x un élément de E » et se termine par « Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie. »

Exemple 1.47. Démontrons que l'assertion suivante est vraie : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) \leqslant 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$. Donc $1-\sin^2(x) = \cos^2(x) \geqslant 0$. D'où : $\sin^2(x) \leqslant 1$.

III.2 Disjonction de cas

Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut partir d'une assertion $\mathscr{Q}$ et démontrer que les deux implications $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ et $\text{non}(\mathscr{Q}) \implies \mathscr{P}$ sont vraies.

Exemple 1.48. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que : $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k \in \mathbb{N}.$$

- Sinon, n est impair donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}.$$

On a donc bien démontré que la propriété est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

III.3 Raisonnement par négation

Méthode. Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer que non($\mathscr{P}$) est fausse et vice versa.

Exemple 1.49. Démontrons qu'il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres. Définissons l'assertion :

$$\mathscr{P} \ : \ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant M.$$

Alors :

$$\text{non}(\mathscr{P}) \ : \ \forall M \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > M.$$

Soit $M \in \mathbb{N}$. Posons $n = M + 1$. Alors, n est un entier strictement plus grand que M, ce qui démontre que non($\mathscr{P}$) est vraie.

III.4 Raisonnement par contraposée

Proposition 1.50

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. Alors :

$$(\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}) \equiv \big[\text{non}(\mathscr{Q}) \implies \text{non}(\mathscr{P})\big].$$

Définition 1.51. L'implication non($\mathscr{Q}$) $\implies$ non($\mathscr{P}$) s'appelle la **contraposée** de l'implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

Exemple 1.52. Démontrons que : $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$.
Supposons que $1 + x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe un entier a et un entier non nul b tels que $1 + x = a/b$. Donc $x = a/b - 1 = (a-b)/b$. Ainsi, x est le quotient de l'entier $a - b$ par l'entier non nul b. D'où : $x \in \mathbb{Q}$. Nous avons donc démontré que l'assertion $(1 + x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q})$ est vraie. Par conséquent sa contraposée $(x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q})$ l'est également.

8 Soit $n \in \mathbb{N}$. En raisonnant par contraposée, démontrer que si n^2 est pair alors n l'est aussi.

III.5 Raisonnement par l'absurde

Méthode. Démontrer par l'absurde qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie consiste à supposer que $\mathscr{P}$ est fausse et à en déduire une absurdité.

Exemple 1.53. Démontrons par l'absurbe que 0 n'admet pas d'inverse. Supposons que 0 admette un inverse a, c'es-à-dire que $0 \times a = 1$. Alors on obtient $0 = 1$, ce qui est faux. On en déduit donc que 0 n'admet pas d'inverse.

III.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode destinée à déterminer les solutions d'un problème. Elle se décompose en deux étapes.

- Analyse : on cherche des conditions **nécessaires** sur les solutions éventuelles du problème. On réduit ainsi les solutions potentielles à un petit nombre.
- Synthèse : on vérifie si les solutions éventuelles trouvées à la première étape conviennent et on écarte les «faux-positifs».

Exemple 1.54. En raisonnant par analyse-synthèse, résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) ci-dessous :

$$(E) : \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}.$$

- Analyse : soit x une solution de (E). Alors, en élevant au carré, on obtient : $x^2 - 3x = 3x - 5$, i.e. $x^2 - 6x + 5 = 0$ et donc : $(x-1)(x-5) = 0$. Ainsi, **si** x est solution de (E), **alors** $x \in \{1, 5\}$.
- Synthèse : soit $x = 5$, alors on a bien : $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5} = \sqrt{10}$, donc x est solution de (E). Cependant, pour $x = 1$, l'équation (E) n'a pas de sens car $x^2 - 3x = -2 < 0$. Il faut donc écarter la «fausse solution» $x = 1$.
- Conclusion : l'équation (E) admet pour unique solution $x = 5$.

9 Soit f une fonction à valeurs réelles. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Indication : on pourra écrire $f = g + h$ puis calculer pour tout x réel $f(x) + f(-x)$ et $f(x) - f(-x)$.

III.7 Démonstration par récurrence

Théorème 1.55

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Si :

(i) $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie, (**initialisation**)

(ii) pour tout $n \geqslant n_0$, l'assertion $\big(\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)\big)$ est vraie, (**hérédité**)

alors, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. (**conclusion**)

Exemple 1.56. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathscr{P}(n) : 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

- **Initialisation**. $\mathscr{P}(1) : 1 = 1$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2(n+1) - 1) &= [1 + 3 + \ldots + (2n-1)] + [2(n+1) - 1] \\ &= n^2 + [2n + 1] \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

  et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion**. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

10 Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction partie entière,
- résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction valeur absolue,
- résoudre des (in)équations trigonomériques,
- vous rappeler et utiliser les formules trigonomériques,
- effectuer des calculs de somme à l'aide du symbole Σ,
- effectuer des calculs de produits à l'aide du symbole Π,
- vous rappeler et utiliser les identités remarquables notamment la formule du binôme de Newton et la somme des termes d'une suite géométrique.

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

I.1 Premières propriétés

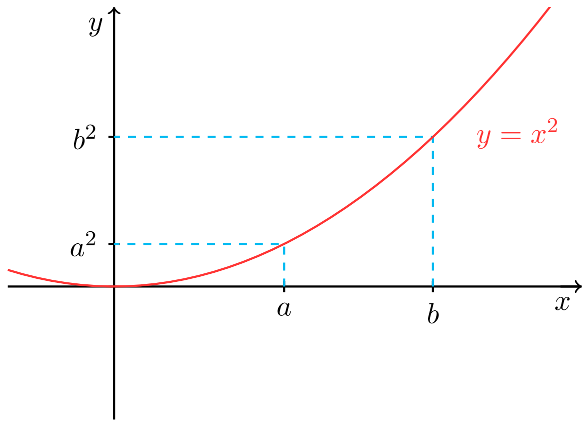
Propriétés 2.1. La **relation d'ordre** $\leqslant$ est **compatible** avec l'addition et la multiplication, au sens où, pour tous réels a, b, c et d :

- $a \leqslant b \implies -b \leqslant -a$;
- $a \leqslant b$ et $c > 0 \implies ac \leqslant bc$;
- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$.

Remarque 2.2. Ces propriétés sont encore valables pour les relations d'ordre $\geqslant$, $<$ et $>$.

Remarque 2.3. Les inégalités sont compatibles avec les fonctions croissantes. On a donc, par exemple :

$$0 \leqslant a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2.$$



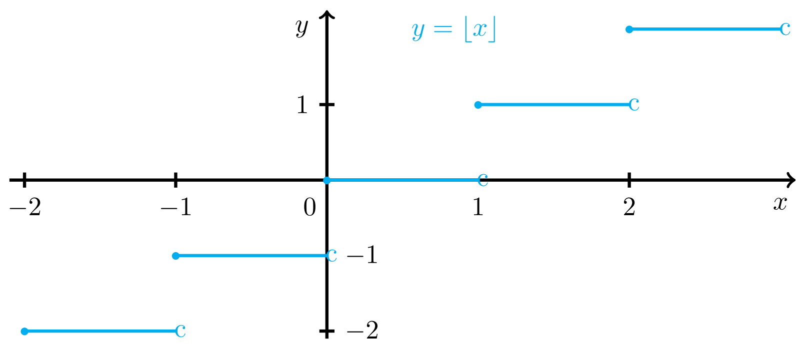
11 Soit $a \leqslant b \leqslant 0$. Que peut-on dire de a^2 et b^2 ?

I.2 Partie entière

Définition 2.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$) le plus grand entier n tel que $n \leqslant x$.

Exemple 2.5. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 12 \rfloor = 12$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$.

Illustration 2.6.



Proposition 2.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

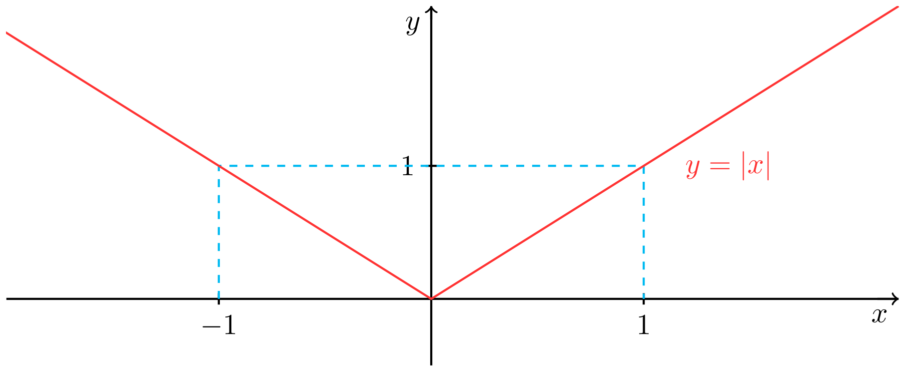
I.3 Valeur absolue

Définition 2.8. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemples 2.9. $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|-40| = 40$.

Illustration 2.10. Graphe de la fonction valeur absolue.



Propriétés 2.11

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

(i) $|x| \geqslant 0$;

(ii) $|xy| = |x||y|$;

(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;

(iv) $|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$ (inégalité triangulaire renversée).

Remarque 2.12. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$. Alors $|x| = \max(x, -x)$ et :

$$|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r.$$

12 Résoudre l'inéquation d'inconnue x suivante : $|x-1| \leqslant 3$. Interpréter graphiquement le résultat.

II Trigonométrie

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

II.1 Le cercle trigonométrique

Définition 2.13. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1. On le notera $\mathscr{C}$ dans la suite.

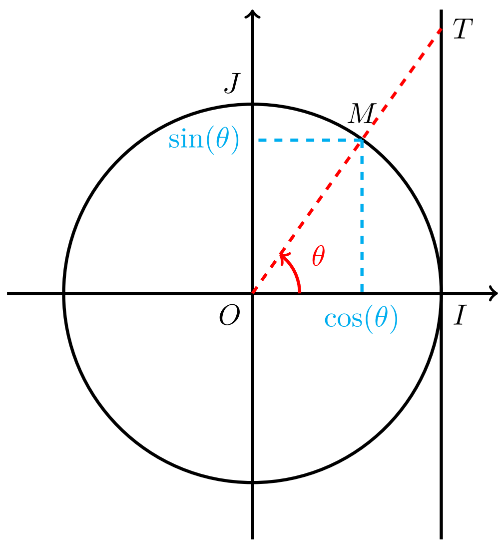
Définition 2.14. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$.
- Le **cosinus** de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus** de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point M

Définition 2.15. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La **tangente** de θ est le nombre réel : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Propriété 2.16. Si on note T le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$, alors T a pour ordonnée $\tan\theta$.

Démonstration. Exercice : appliquer le théorème de Thalès. □

Illustration 2.17.



Rappel 2.18. Le réel θ correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ à laquelle on a éventuellement ajouté ou retranché un multiple de 2π.

II.2 Propriétés des fonctions circulaires

Propriétés 2.19. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$;
(ii) $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$;
(iii) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$;
(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$;
(v) $\cos(-\theta) = \cos\theta$;
(vi) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$;
(vii) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Démonstration. Les points (i) à (vi) sont évidents. Quant au point (vii), c'est une conséquence du théorème de Pythagore. □

Proposition 2.20

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Remarque 2.21. Ces deux formules (à connaître par cœur) permettent de simplifier les expressions du type $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(\theta+\pi)$, $\sin(\pi/2-\theta)$, etc... Elles permettent aussi de retrouver les formules :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Exemple 2.22. On a : $\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = -\cos\theta$.

Propriétés 2.23

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Propriété 2.24

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$:

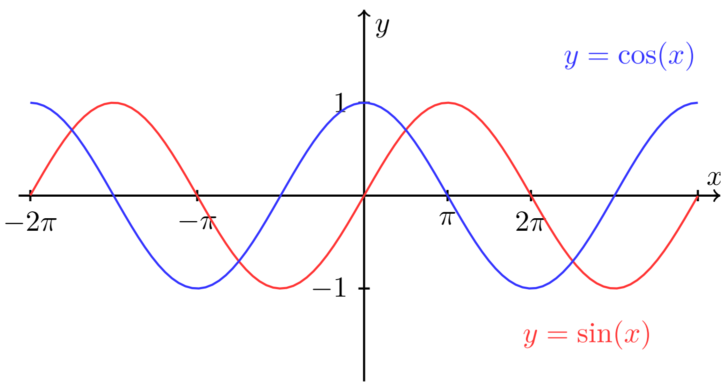
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Exercice. □

II.3 Représentations graphiques

La fonction cosinus est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction sinus est quant à elle impaire. Sa courbe représentative présente donc une symétrie par rapport à l'origine du repère.

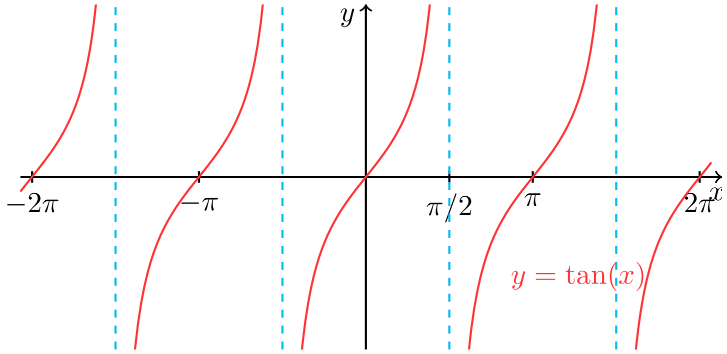
Illustration 2.25. Graphe des fonctions sinus et cosinus.



Propriété 2.26. La fonction tangente est π-périodique (c'est-à-dire que pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$) et impaire.

Démonstration. Exercice. □

Illustration 2.27. Graphe de la fonction tangente.

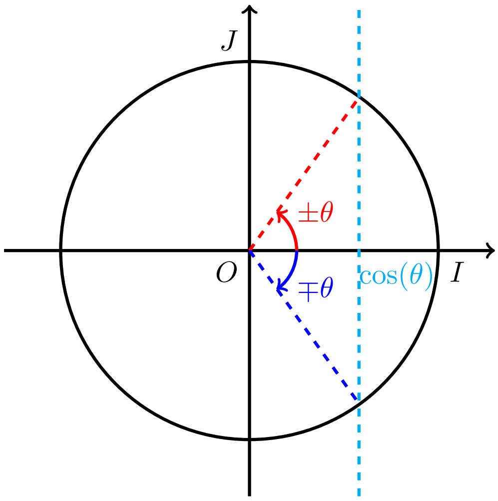


II.4 Résolution d'équations trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer les solutions de l'équation suivante :

$$\cos x = \cos\theta.$$

Pour ce faire, on dessine le cercle trigonométrique :



On en déduit que :

$$\cos x = \cos\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \Big(x = \theta + 2k\pi \text{ ou } x = -\theta + 2k\pi\Big)$$

On démontre de même que :

$$\sin x = \sin\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \Big(x = \theta + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \theta + 2k\pi\Big)$$

Enfin, si $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors :

$$\tan x = \tan\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \theta + k\pi.$$

Remarque 2.28. Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur. Il faut être capable de reproduire le raisonnement présenté ci-dessus en faisant apparaître les éléments pertinents sur le cercle trigonométrique.

13 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$ suivante : $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

III Sommes et produits

III.1 La notation $\sum$ (sigma)

Définition 2.29. Soit $(u_1, \cdots, u_N)$ une famille de nombres réels (ou complexes). On note :

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_N.$$

On lit «**somme** pour k variant de 1 à N des u_k».

Remarque 2.30. En toute rigueur, il faudrait définir le symbole Σ par récurrence.

Remarque 2.31. Dans la définition précédente, k est une **variable muette**. Le résultat de la somme **ne dépend pas** de k.

Exemples 2.32. On a :

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \sum_{j=0}^{3} j^2,$$
$$\sum_{k=1}^{2} 2k\cos(k\pi/2) = 2\cos(\pi/2) + 2 \times 2\cos(\pi) = -4,$$
$$\sum_{k=1}^{10} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = 10.$$

Propriété 2.33

Pour toutes familles $(u_1, \cdots, u_N)$ et $(v_1, \cdots, v_N)$, pour tout nombre complexe λ :

$$\sum_{k=1}^{N} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{N} u_k + \sum_{k=1}^{N} v_k.$$

Remarque 2.34. Effectuer un **changement d'indice** dans une somme peut s'avérer utile. Par exemple :

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{p=1}^{n-2} u_{p+2}.$$

En effet, en posant $p = k - 2$, on a :

$$\begin{cases} 3 \leqslant k \leqslant n \\ p = k - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leqslant k - 2 \leqslant n - 2 \\ p = k - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant n - 2 \\ k = p + 2 \end{cases}.$$

14 Écrire les deux sommes de la remarque précédente à l'aide de points de suspension et vérifier le résultat.

Proposition 2.35

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

III.2 Les notations $\prod$ (pi) et ! (factorielle)

Définition 2.36. Soit $(u_1, \cdots, u_N)$ une famille de nombres réels (ou complexes). On note :

$$\prod_{k=1}^{N} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_N.$$

On lit «**produit** pour k variant de 1 à N des u_k».

Remarque 2.37. Tout comme pour la somme, k est une **variable muette**. Le résultat du produit **ne dépend pas de** k.

Remarque 2.38. En toute rigueur, le symbole Π devrait être défini par récurrence.

Exemples 2.39. On a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 = 36$, $\displaystyle\prod_{k=4}^{6} 2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

Définition 2.40. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle «**factorielle** n» ou encore «n factorielle» le nombre entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n.$$

Par convention, on note encore $0! = 1$.

Propriété 2.41

Pour toutes familles $(u_1, \cdots, u_N)$ et $(v_1, \cdots, v_N)$:

$$\prod_{k=1}^{N} \left(u_k v_k\right) = \left(\prod_{k=1}^{N} u_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{N} v_k\right) \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{N} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{N} u_k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{N} v_k},$$

où la deuxième égalité est valable dès que $v_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$.

IV Quelques identités remarquables

IV.1 Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 2.42

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \geqslant 2$ un entier. Alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.43. Il s'agit d'une généralisation de l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Corollaire 2.44

Soient $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

IV.2 Coefficients binomiaux

Rappel 2.45. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On rappelle que le **coefficient binomial** k **parmi** n est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 2.46. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

15 Lister tous les parties de $\{1,2,3,4\}$ contenant exactement 3 éléments. Calculer ensuite $\binom{4}{3}$.

Proposition 2.47

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Alors : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Proposition 2.48 (Relation de Pascal)

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Alors : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Illustration 2.49. Le tableau ci-dessous est appelé triangle de Pascal. En commençant la numérotation à 0, on y retrouve à la k-ième colonne et à la n-ième ligne la valeur du coefficient binômial $\binom{n}{k}$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

IV.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 2.50

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 2.51. Cette formule est à connaître par cœur ! Il s'agit d'une généralisation de la formule :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Méthode (Développer $(a+b)^p$ pour p petit). Pour développer une expression du type $(a+b)^p$ avec p un entier «petit» donné, on écrit le triangle de Pascal jusqu'à la ligne p (en commençant la numérotation à 0). La dernière ligne du tableau nous donne la valeur des coefficients binômiaux qui apparaîssent dans la formule du binôme de Newton.

Exemple 2.52. Développons $(a+b)^3$. On commence par écrire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 3 :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	

Les coefficients qui apparaîssent dans la dernière ligne sont ceux dans le développement de $(a+b)^3$ par la formule du binôme de Newton. On obtient alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} a^0 b^3 + \underbrace{\binom{3}{1}}_{=3} a^1 b^2 + \underbrace{\binom{3}{2}}_{=3} a^2 b^1 + \underbrace{\binom{3}{3}}_{=1} a^3 b^0 \\ &= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3.\end{aligned}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

16 Développer $(x+y)^6$ pour deux réels quelconques x et y.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- déterminer la monotonie éventuelle d'une suite,
- étudier une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique,
- maîtriser les opérations sur les limites,
- appliquer le théorème de comparaison,
- appliquer le théorème de la limite monotone,
- appliquer le théorème des gendarmes,
- démontrer que deux suites sont adjacentes,
- étudier la convergence d'une suite à partir des limites de sous-suites,
- appliquer le théorème des croissances comparées pour déterminer des limites de suites,
- manipuler les suites équivalentes.

Plusieurs résultats portant sur les suites se démontrent par récurrence. Il est donc impératif de bien maîtriser le raisonnement par récurrence pour aborder sereinement ce chapitre.

I Introduction

I.1 Premières définitions

Définition 3.1. Une **suite réelle** est une application $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note indifféremment $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_n$. On dit que u_n est le **terme général** de la suite.

Remarque 3.2. Il se peut qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. On note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Pour simplifier, on supposera dans la suite que $n_0 = 0$ ou parfois que $n_0 = 1$.

Exemple 3.3. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est la suite dont les termes successifs sont $1, -1, 1, -1, \ldots$

Définition 3.4. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

Remarque 3.5. Attention à l'ordre des quantificateurs ! Le réel M doit majorer tous les éléments de la suite.

17 Démontrer que toute suite réelle $(u_n)_n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R},\ u_n \leqslant M$.

Définition 3.6. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$.

Définition 3.7. Une suite réelle est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

18 Démontrer qu'une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

Exemple 3.8. La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

Définition 3.9. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est :

- **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$,
- **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$,
- **strictement croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$,
- **strictement décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

On définit de manière similaire ce qu'est une suite **décroissante**, **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemple 3.10. La suite de terme général $u_n = 2n$ est strictement croissante.

Exemple 3.11. Une suite dont les premiers termes sont : $0, 1, 3, -1, 4, -6$, n'est ni croissante ni décroissante.

19 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Écrire les négations des deux assertions «$(u_n)_n$ est croissante» et «$(u_n)_n$ est décroissante» puis démontrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n n$ n'est ni croissante ni décroissante.

I.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 3.12. On appelle suite **arithmétique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r,$$

où $r \in \mathbb{R}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et est appelé **raison** de la suite.

Proposition 3.13

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Récurrence immédiate : exercice. □

20 Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des n premiers termes de la suite.

Définition 3.14. On appelle suite **géométrique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n,$$

où $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et appelé **raison** de la suite.

Proposition 3.15

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, q^n.$$

Démonstration. C'est une récurrence immédiate : exercice. □

21 Soient $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des n premiers termes de la suite.

II Convergence d'une suite réelle

II.1 Limite finie

Définition 3.16. On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

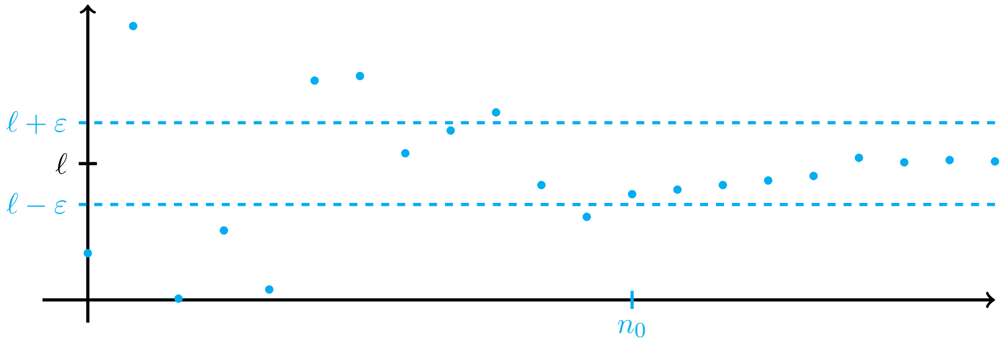
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. On note :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,$$

ou encore simplement $u_n \to \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Illustration 3.17.



Remarque 3.18. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2.$$

En effet, il suffit pour $\varepsilon > 0$ fixé d'appliquer la définition avec le réel $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

Exemple 3.19. Démontrons à l'aide de la définition que la suite constante de terme général $u_n = 2$ est convergente. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$: $|u_n - 2| = 0 < \varepsilon$. On a donc bien démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - 2| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 3.20 (unicité de la limite)

Si une suite réelle converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Proposition 3.21

Toute suite réelle convergente est bornée.

II.2 Limites infinies

Définition 3.22. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ u_n \geqslant M.$$

On note :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty,$$

ou encore simplement $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

Autrement dit, une suite tend vers $+\infty$ si, quel que soit le réel M, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus grands que M.

Exemple 3.23. Démontrons, à l'aide de cette définition, que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 2n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$.

- Si $M < 0$, alors on pose $n_0 = 0$ de sorte que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0 > M$.
- Sinon, posons $n_0 = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1$. Alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = 2n \geqslant 2n_0 \geqslant 2\frac{M}{2} = M$.

On a ainsi démontré la propriété suivante :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M.$$

Auterment dit, la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Définition 3.24. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **tend vers** $-\infty$ si :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant m.$$

Propriété 3.25. Si la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(u_n)_n$ est minorée et non majorée.

Propriété 3.26. Une suite tendant vers $-\infty$ est majorée et non minorée.

II.3 Opérations sur les limites

Proposition 3.27

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors, $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$.

Proposition 3.28

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente de limite ℓ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\ell$.

Proposition 3.29

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.

Proposition 3.30

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Si $\ell_2 \neq 0$, alors, $u_n/v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1/\ell_2$.

Remarque 3.31. Si $v_n \to \ell_2 \neq 0$, alors $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang.

II.4 Limites et relations d'ordre

Théorème 3.32 (de comparaison)

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que pour n suffisamment grand on ait $u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

(ii) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

(iii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.

Remarque 3.33. Si $u_n < v_n$ (inégalité stricte), alors, il se peut que les suites aient la même limite.

22 Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ayant la même limite telles que pour tout n, $u_n < v_n$.

Théorème 3.34

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée. Alors, $(u_n)_n$ converge.

23 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k! \geqslant 2^{k-1}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Corollaire 3.35

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante et minorée. Alors, $(u_n)_n$ converge.

II.5 Théorème des gendarmes

Théorème 3.36 (des gendarmes)

Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(u_n)_n$ trois suites réelles vérifiant à partir d'un certain rang :

(i) $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$,

(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Alors, $u_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

Corollaire 3.37

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et ℓ un nombre réel tels que
(i) à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$,
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
Alors, $u_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

24 Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

II.6 Suites adjacentes

Définition 3.38. On dit que deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** lorsque :
(i) l'une est croissante,
(ii) l'autre est décroissante,
(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.39

Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

Corollaire 3.40

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes. Notons ℓ leur limite commune. Dans le cas où $(u_n)_n$ est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Remarque 3.41. Dans le cas où $(u_n)_n$ est décroissante, on obtient l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant \ell \leqslant u_n$$

Exemple 3.42. Considérons les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Remarquons que ces suites sont bien définies : il est clair qu'elles sont strictement positives (récurrence immédiate). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(v_n + u_n)} \geqslant 0, \qquad (3.1)$$

où la dernière égalité provient de $u_n v_n = 2$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant u_n$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$. Donc, la suite $(v_n)_n$ est décroissante. On en déduit que $(u_n)_n$ est croissante (car $u_n = 2/v_n$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation (3.1) peut aussi s'écrire :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} \cdot (v_n - u_n). \tag{3.2}$$

Or,

$$-u_n \leqslant u_n \Rightarrow v_n - u_n \leqslant v_n + u_n \Rightarrow \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} \leqslant 1.$$

De plus, $v_n - u_n \geqslant 0$. On en déduit en reprenant l'équation (3.2) que : $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. Ainsi, par une récurrence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = \frac{1}{2^n}.$$

La suite $(v_n - u_n)_n$ admet donc pour limite zéro en l'infini. De plus, $(u_n)_n$ étant croissante et $(v_n)_n$ décroissante, les suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ. Enfin, la relation $u_{n+1} = \dfrac{2}{v_{n+1}}$ implique que $\ell = \dfrac{2}{\ell}$. On en déduit que $\ell = \pm\sqrt{2}$ et donc que $\ell = \sqrt{2}$, les suites étant à termes positifs.

25 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

II.7 Suites extraites

Définition 3.43. Soit $(u_n)_n$ une suite. Une **suite extraite** (ou **sous-suite**) de $(u_n)_n$ est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 3.44. La suite dont les termes sont donnés par :

$$u_0, u_1, u_3, u_4, u_6, u_7, u_9, u_{10}, \ldots$$

est une suite extraite de $(u_n)_n$.

Exemple 3.45. Soit $\varphi \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} = u_{2n}$. La suite extraite $(u_{2n})_n$ de $(u_n)_n$ est la suite formée des termes d'indices pairs de $(u_n)_n$.

Proposition 3.46

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente. Alors, toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers la même limite.

Remarque 3.47. Si $(u_n)_n$ admet deux sous-suites qui convergent vers deux limites distinctes, alors $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

26 À l'aide de la remarque précédente, démontrer que la suite $(u_n)_n$ définie ci-dessous n'est pas convergente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Indication : on pourra considérer les suites extraites (u_{4n}) et (u_{4n+1}).

Remarque 3.48. Il se peut que deux sous-suites de $(u_n)_n$ soient convergentes vers la même limite sans que $(u_n)_n$ ne le soit.

Exemple 3.49. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est multiple de } 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(u_{3n+1})_n$ et $(u_{3n+2})_n$ convergent vers 0. Pourtant $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Théorème 3.50

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite ℓ. Alors, $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Remarque 3.51. On peut démontrer de même que si $(u_{3n})_n$, $(u_{3n+1})_n$ et $(u_{3n+2})_n$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

III Comparaison de suites

III.1 Définitions

Définition 3.52. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.

(i) On dit que $(u_n)_n$ est **négligeable** devant $(v_n)_n$ au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n =_\infty o(v_n)$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que, à partir d'un certain rang :

$$u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

(ii) On dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **équivalentes** au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n \sim_\infty v_n$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que, à partir d'un certain rang :

$$u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Proposition 3.53

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. Si la suite $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors :

(i) $u_n =_\infty o(v_n) \Leftrightarrow u_n/v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$;

(ii) $u_n \sim_\infty v_n \Leftrightarrow u_n/v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Théorème 3.54

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ quatre suites non nulles à partir d'un certain rang. Si $a_n \sim_\infty b_n$ et que $u_n \sim_\infty v_n$, alors :

$$a_n u_n \sim_\infty b_n v_n \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{u_n} \sim_\infty \frac{b_n}{v_n}.$$

Attention. Ne jamais additionner ou composer des équivalents.

Exemple 3.55. On sait que : $n+1 \sim_{\infty} n$. Pourtant : $(n+1)-n \not\sim_{\infty} n-n=0$.

Attention. Une suite n'est **jamais équivalente à** 0 sauf si tous ses termes sont égaux à 0 à partir d'un certain rang.

III.2 Croissances comparées

Théorème 3.56

Soient $\alpha>0$ et $a>1$. Alors :

(i) $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; (ii) $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; (iii) $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 3.57. Pour simplifier, on écrit ces résultats de croissances comparées de la façon suivante :

$$\ln(n) \ll n \ll n^2 \ll \mathrm{e}^n \ll n!.$$

Remarque 3.58. En pratique, pour lever une indétermination, on gardera le terme «le plus fort» (c'est-à-dire celui qui converge le plus vite).

27 Déterminer des équivalents simples puis les limites éventuelles des suites définies par :

$$u_n = \frac{3^n+1}{5n-n^2}, \quad v_n = \frac{2^n+3^n}{n!+n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

IV Suites et fonctions

Propriété 3.59. Soit f une fonction à valeurs réelles et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$. Si f est croissante (resp. décroissante), alors $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration. Exercice. □

Propriété 3.60. Soient une fonction à valeurs réelles et $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Si f est croissante alors $(u_n)_n$ est monotone.

Démonstration. Exercice. □

28 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessous est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

2. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- manipuler les symboles ensemblistes,
- déterminer l'image d'un ensemble par une application,
- déterminer l'image réciproque d'un ensemble par une application,
- déterminer le caractère bijectif ou non d'une application,
- déterminer la bijection réciproque d'une application bijective,
- effectuer des calculs de dénombrement sur des ensembles finis.

I Ensembles

I.1 Quelques rappels

Définition 4.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 4.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 4.3. L'ensemble $\{2n, n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des nombres pairs.

Exemple 4.4. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 4.5. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Définition 4.6. Soient E et F deux ensembles. On dit qu'ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 4.7. Il n'y a pas nécessairement de relation d'ordre dans un ensemble. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{1; 2\} = \{2; 1\}$.

Définition 4.8. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Remarque 4.9. $E \subset F$ si et seulement si :

$$\forall x \in E, \ x \in F.$$

Méthode. En pratique, pour démontrer que $E \subset F$, on peut commencer à raisonner de la façon suivante : «soit $x \in E$, démontrons que $x \in F$».

Remarque 4.10. Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

I.2 Produit cartésien

Définition 4.11. Soient E et F deux ensembles. À partir de $x \in E$ et de $y \in F$, on forme le **couple** (x, y) défini de sorte que : $(x, y) = (x', y')$ uniquement lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Attention. Ici, l'ordre des éléments est important. Par exemple :

$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

Définition 4.12. On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F l'ensemble formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$:

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

I.3 Ensemble des parties

Définition 4.13. Soit E un ensemble. On appelle **sous-ensemble** (ou **partie**) de E tout ensemble F inclus dans E.

Définition 4.14. Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E et on note $P(E)$ l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 4.15. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. Alors :

$$P(E) = \big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}; \varnothing\big\}.$$

Exemple 4.16. Soit $E = \{a\}$. Alors :

$$P(E) = \big\{\{a\}; \varnothing\big\}.$$

Remarque 4.17. Quel que soit l'ensemble E, on a toujours $\varnothing \in P(E)$ et $E \in P(E)$.

29 Écrire $P(E)$ dans chacun des cas suivants :
- $E = \{x; y\}$;
- $E = \varnothing$;
- $E = \{\star; \circ\}$.

I.4 Réunion, intersection et complémentaire

Dans cette partie, on notera E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

Définition 4.18. On appelle **intersection** de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.

Remarque 4.19. En termes mathématiques :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Exemple 4.20. Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$, alors $A \cap B = \{3\}$.

Proposition 4.21

(i) $A \cap B = B \cap A$;

(ii) $A \cap A = A$;

(iii) $A \cap E = A$;

(iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Définition 4.22. On appelle **réunion** de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

Remarque 4.23. En termes mathématiques :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Exemple 4.24. Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$, alors $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Proposition 4.25

(i) $A \cup B = B \cup A$;

(ii) $A \cup A = A$;

(iii) $A \cup E = E$;

(iv) $A \cup \varnothing = A$.

Définition 4.26. Les ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 4.27. Le **complémentaire** de A (dans E), noté $E \backslash A$ (ou $\bar{A}$) est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Remarque 4.28. En termes mathématiques :

$$x \in E \backslash A \iff x \in E \text{ et } x \notin A.$$

Définition 4.29. L'ensemble B **privé de** A (noté $B \backslash A$) est l'ensemble des éléments de E qui sont dans B mais pas dans A. Autrement dit :

$$B \backslash A = \{x \in E, x \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

Exemple 4.30. Soient $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$. Alors :

$$E \backslash A = \{4; 5; 6\}. \quad \text{et} \quad B \backslash A = \{4; 5\}.$$

Proposition 4.31 (Lois de Morgan)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Proposition 4.32 (Distributivité)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

II Applications

II.1 Définitions

Définition 4.33. Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F est la donnée d'une partie Γ de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \ \exists! y \in F, \ (x, y) \in \Gamma.$$

Γ est appelé le **graphe** de la fonction f.

Remarque 4.34. Cette définition très formelle est une reformulation la définition **??** donnée dans le chapitre 1. Elle met en exergue le fait qu'une application (ou une fonction) prend une valeur et une seule en un point donné de l'ensemble de départ. C'est pourquoi un trait vertical sur le graphe d'une fonction n'a aucun sens !

Définitions 4.35. Si $x \in E$, alors on note $f(x)$ l'unique y de la définition précédente. Il est appelé l'**image** par f de l'élément x. Pour tout $y \in F$, les x tels que $f(x) = y$ (si il y en a) sont appelés **antécédents** par f de y. On écrira l'application f de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & E & \to & F. \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque 4.36. Une application est donc la donnée de 3 éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et les images des éléments de l'ensemble de départ. Les applications ci-dessous sont donc toutes différentes :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} h & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Remarque 4.37. On peut définir une fonction en donnant la liste de ses images plutôt qu'à l'aide d'une «formule» générale. Par exemple :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \{1;2;3\} & \to & \{a;b\}. \\ & & 1 & \mapsto & a \\ & & 2 & \mapsto & b \\ & & 3 & \mapsto & a \end{array}$$

Remarque 4.38. On peut définir une fonction par disjonction de cas, comme on l'a fait par exemple pour la valeur absolue.

Définition 4.39. Soit E un ensemble. L'application **identité** sur E est l'application :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{id}_E & : & E & \to & E. \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

Exemple 4.40. Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels peut être vue comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}. \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$$

C'est d'ailleurs pourquoi on utilise parfois la notation $u(n)$ plutôt que u_n.

Définition 4.41. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ (ou parfois F^E).

Remarque 4.42. On écrira indifféremment « f est une application de E dans F » ou « $f \in \mathscr{F}(E,F)$ » ou encore $f\colon E \to F$.

II.2 Restriction et composition

Définition 4.43. Soient $f\colon E \to F$ une application et $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application :

$$\begin{array}{rcccc} f_{|A} & : & A & \to & F. \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 4.44. Considérons la fonction sinus :

$$\begin{array}{rcccc} \sin & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Sa restriction à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ est :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [-\pi/2, \pi/2] & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Définition 4.45. Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications. La **composée** de f par g, notée $g \circ f$ est :

$$g \circ f \quad : \quad \begin{array}{rcl} E & \to & G. \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cette application est bien définie car lorsque $x \in E$, $f(x) \in F$.

30 Soient les fonctions f et g définies par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+. \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$.

Exemple 4.46. Considérons $E = \{1; 2\}$, $F = \{7, 8, 9\}$ et $G = \{-1, -2\}$. Soient $f: E \to F$ et $g: F \to H$ définies par :
- $f(1) = 7$,
- $f(2) = 9$,
- $g(7) = g(8) = g(9) = -1$.

Alors :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = -1.$$

Remarque 4.47. En général, $f \circ g \neq g \circ f$. Il se peut d'ailleurs que $g \circ f$ ait un sens alors que $f \circ g$ ne soit pas définie (cf exemple précédent).

Proposition 4.48

Soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$ et $h \in \mathscr{F}(G, H)$, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{et} \qquad f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f = f.$$

Démonstration. Exercice. □

II.3 Image d'un ensemble par une application

Définition 4.49. Soient $f: E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

Exemple 4.50. Considérons $E = \{1; 2; 3\}$, $F = \{a, b, c\}$ et $f: E \to F$ définie par :

$$f(1) = f(2) = a \text{ et } f(3) = c.$$

Alors :
- $f(\{1; 2\}) = \{f(x), x \in \{1; 2\}\} = \{f(1); f(2)\} = \{a\}$;
- $f(E) = \{f(x), x \in E\} = \{f(1); f(2); f(3)\} = \{a; c\}$.

31 Soit f l'application définie par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 4.51. Si $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $a \in E$, alors on a toujours :

$$f(\varnothing)=\varnothing, \quad f(\{a\})=\{f(a)\} \quad \text{et} \quad f(E)\subset F.$$

Exemple 4.52. Soient $E=F=\mathbb{R}$ et :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Alors, $f(E) \subsetneq F$. On peut changer l'espace d'arrivée pour qu'il y ait égalité, mais il ne s'agit alors plus de la même application !

II.4 Image réciproque d'un ensemble par une application

Définition 4.53. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B)=\big\{x\in E,\ f(x)\in B\big\}.$$

Autrement dit :

$$x\in f^{-1}(B) \iff f(x)\in B.$$

Remarque 4.54. On a toujours $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$. De plus, pour tout élément b de F :

$$f^{-1}\big(\{b\}\big)=\big\{x\in E,\ f(x)=b\big\}.$$

32 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

1. Déterminer $f^{-1}(\{4\})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{-1\})$.
3. Déterminer $f^{-1}([-1;2])$.

II.5 Applications bijectives

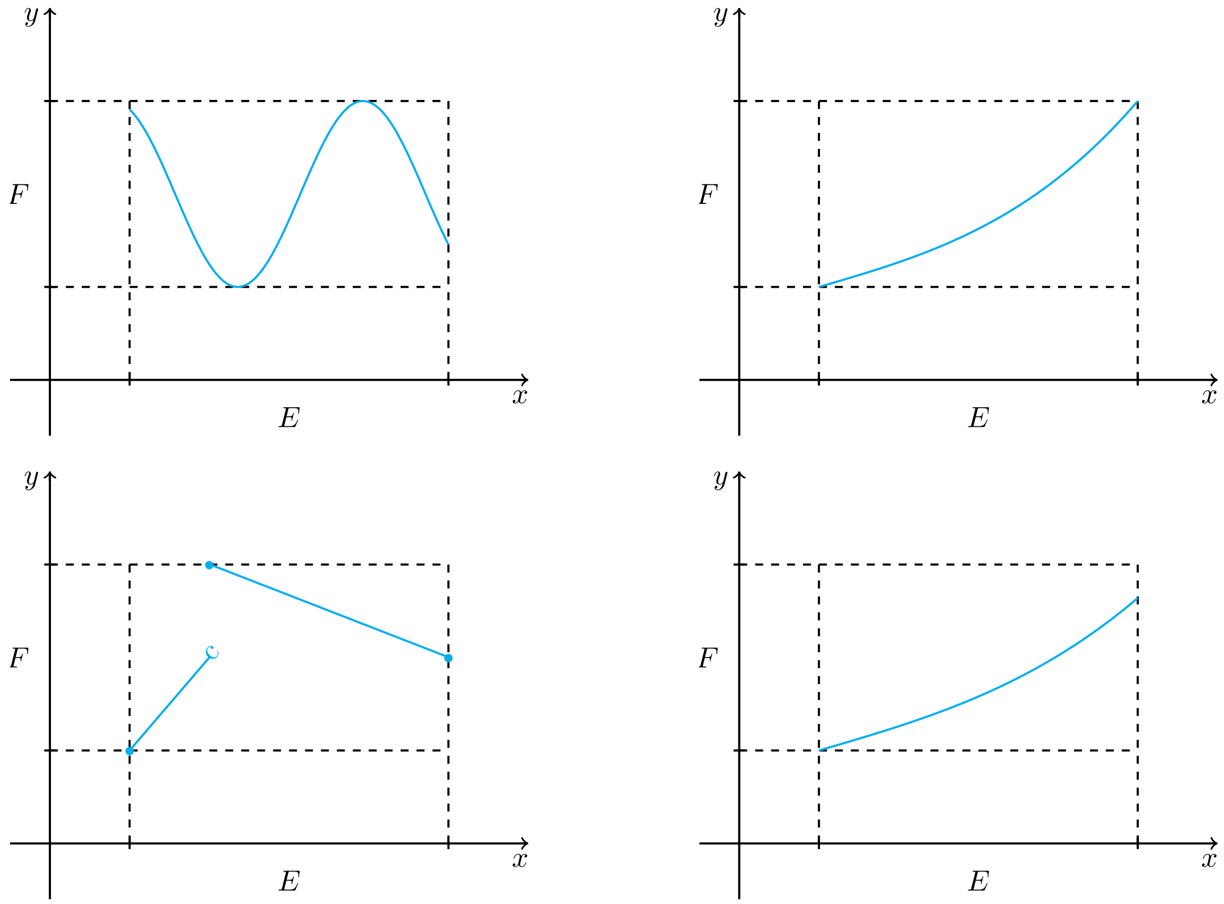
II.5.1 Définition

Définition 4.55. Soit $f\in\mathscr{F}(E,F)$. On dit que :

- f est **injective** si :
$$\forall (x,x')\in E^2,\ \big(x\neq x' \implies f(x)\neq f(x')\big)$$
Autrement dit, f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- f est **surjective** si :
$$\forall y\in F,\ \exists x\in E,\ f(x)=y.$$
Autrement dit, tous les éléments de F admettent au moins un antécédent par f.
- f est **bijective** si :
$$\forall y\in F,\ \exists! x\in E,\ f(x)=y.$$
Autrement dit, tous les éléments de F admettent exactement un antécédent par f.

Remarque 4.56. Une application est bijective ssi elle est injective et surjective.

33 Parmi ces applications de E dans F, lesquelles sont injectives ? Surjectives ? Bijectives ? Justifier.



34 Soit $f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ Alors, f n'est pas bijective. Pourquoi ?

Qu'en est-il des applications $g \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $h \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$?

Méthode. Pour étudier le caractère bijectif d'une application $f\colon E \to F$, on résout pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$:

- si pour tout $y \in F$ cette équation admet une unique solution $x \in E$, alors f est bijective
- s'il existe au moins un élément $y \in F$ pour lequel cette équation n'admet aucune solution $x \in E$ ou admet au moins deux solutions distinctes, alors f n'est pas bijective.

Exemple 4.57. Soit f l'application définie par $f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[. \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$

Soit $y \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$y = f(x) \iff y = x^2 + 1 \iff x^2 = y - 1 \iff x = \sqrt{y-1},$$

où la dernière équivalence découle de $x \geqslant 0$ et de $y \geqslant 1$. Ainsi, f est bijective.

Remarque 4.58. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour démontrer qu'une application $f\colon I \to J$ **continue** est bijective, on pourra démontrer qu'elle est strictement monotone et étudier ses limites aux bornes de l'intervalle.

Exemple 4.59. Soit f l'application définie par $f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1; +\infty[. \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$

Alors, l'application f est strictement croissante car : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = \exp(x) > 0$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Ainsi, f effectue une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

Proposition 4.60

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est une application bijective.

II.5.2 Bijection réciproque

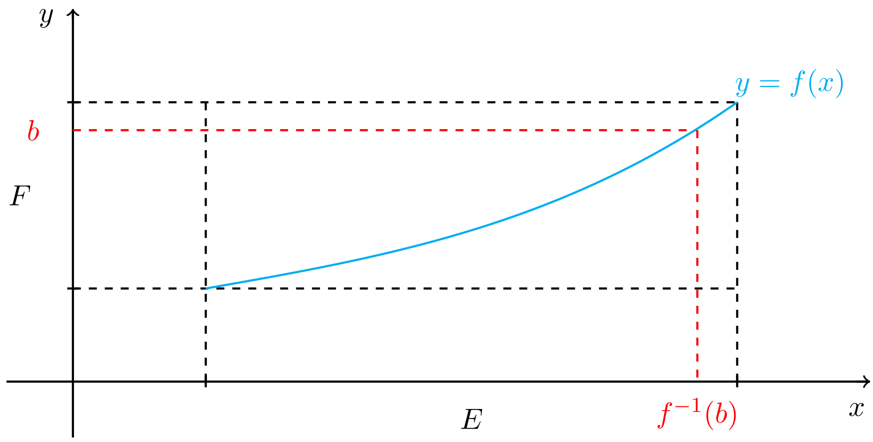
Définition 4.61. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application bijective. On appelle **bijection réciproque** de f et on note f^{-1} l'application qui a tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Remarque 4.62. Si f est bijective alors pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Méthode. Pour déterminer la bijection réciproque d'une application bijective $f\colon E \to F$, on résout pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$: l'unique antécédent x par f de y est $f^{-1}(y)$.

Illustration 4.63.



Exemple 4.64. Soit f l'application $\begin{array}{rccc} f & : & [0;1] & \to & [3;5]. \\ & & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$ Pour $y \in [3;5]$ et $x \in [0;1]$, on a :

$$y = f(x) \iff y = 2x+3 \iff x = (y-3)/2.$$

Ainsi, la bijection réciproque de f est $\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & [3;5] & \to & [0;1] \\ & & y & \mapsto & (y-3)/2 \end{array}$ et on peut remarquer que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0;1],\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \big((2x+3)-3\big)/2 = x \\ \forall y \in [3;5],\ f(f^{-1}(y)) = f\big((y-3)/2\big) = 2\big((y-3)/2\big) + 3 = y - 3 + 3 = y. \end{cases}$$

35 L'application f définie ci-dessous est-elle bijective ? Le cas échéant, déterminer sa bijection réciproque.

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \{\circ;\triangleleft\} & \to & \{-1,1\}. \\ & & \circ & \mapsto & 1 \\ & & \triangleleft & \mapsto & -1 \end{array}$$

36 Soient $E = \{1;2;3\}$, $F = \{a,b,c\}$ et $f\colon E \to F$ l'application définie par :

$$f(1) = a,\ f(2) = c \ \text{ et } \ f(3) = b.$$

Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Proposition 4.65

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application bijective. Alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

De plus, f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 4.66

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application. Alors, il y a équivalence entre :

(i) f est bijective ;

(ii) Il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

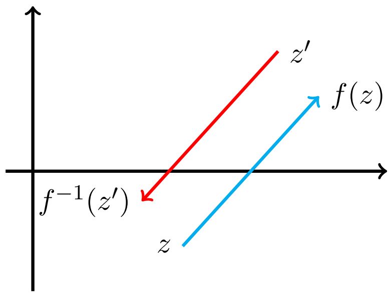
De plus, si tel est le cas, g est unique et $g = f^{-1}$.

Exemple 4.67.
Considérons la translation de vecteur $(1,1)$ dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ & & z & \mapsto & z+(1+i) \end{array}$$

ainsi que la translation de vecteur $(-1,-1)$ dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}. \\ & & z & \mapsto & z-(1+i) \end{array}$$



Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} f(g(z)) = f\big(z-(1+i)\big) = \big(z-(1+i)\big)+(1+i) = z \\ g(f(z)) = g\big(z+(1+i)\big) = \big(z+(1+i)\big)-(1+i) = z. \end{cases}$$

Donc, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 4.68. Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^\star. \\ & & x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

Définissons l'application $\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{N}. \\ & & x & \mapsto & x-1 \end{array}$ On vérifie aisément que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^\star}$. Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Remarque 4.69. Il faut vérifier les deux conditions $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ pour démontrer que f est bijective. En effet, prenons :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$. Pourtant, ni f ni g ne sont bijectives.

Proposition 4.70

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux applications bijectives. Alors, $g \circ f$ est bijective et :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

III Ensembles finis

Définition 4.71. Un ensemble E est dit **fini** s'il existe un entier n ainsi qu'une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$.

Remarque 4.72. Par convention, on dira aussi que l'ensemble vide est fini.

37 Démontrer que l'ensemble $\{a, b, c\}$ est fini.

Définition 4.73. Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Exemple 4.74. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis.

Propriété 4.75. Si un ensemble E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Définition 4.76. Le **cardinal** d'un ensemble fini E est l'entier n de la définition 4.71. On le note $\operatorname{Card}(E)$ (ou $\sharp E$ ou $|E|$). On convient que $\operatorname{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple 4.77. L'ensemble $\{a, b, c\}$ est de cardinal 3.

Proposition 4.78

Soient E un ensemble **fini** et A et B deux parties de E. Alors :

(i) A et B sont finis de cardinal inférieur à $\operatorname{Card}(E)$;

(ii) $A = E \iff \operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(E)$;

(iii) $\operatorname{Card}(E \backslash A) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(A)$;

(iv) $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)$;

(v) $\operatorname{Card}(A \times B) = \operatorname{Card}(A)\operatorname{Card}(B)$.

Méthode. Pour démontrer que deux parties A et B d'un ensemble fini E sont égales, on pourra démontrer que $A \subset B$ et que $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(B)$.

Proposition 4.79

Soient E un ensemble fini et $A_1, \ldots, A_N$ une famille de sous-ensembles de E disjoints deux à deux. Alors :
$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Card}(A_i).$$

IV Dénombrement

Dans tout ce qui suit, n et p désignent deux entiers vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$, et E désigne un ensemble à n éléments.

IV.1 Arrangements

Définition 4.80. Un **arrangement** de p éléments (ou un p-**arrangement**) de E est une liste ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 4.81. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. Les arrangements de 2 éléments de E sont :

$$(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2).$$

Proposition 4.82

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de p-arrangements de E est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple 4.83. Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 5 chiffres dont tous les chiffres sont distincts ? Il y en a $A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$.

Exemple 4.84. Combien y a-t-il de podiums possibles lors d'une course avec 8 athlètes ? Il y en a $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 336$.

IV.2 Combinaisons

Définition 4.85. Une **combinaison** de E à p éléments est un sous-ensemble de E à p éléments.

Exemple 4.86. Soit $E = \{a, b, c\}$. Les combinaisons de E à 2 éléments sont :

$$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}.$$

Ici, l'ordre ne compte pas.

Proposition 4.87

Soient E un ensemble de cardinal n et $p \leqslant n$. Le nombre de combinaisons à p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

38 Au loto, on tire 6 boules numérotées parmi 49. Combien y a-t-il d'issues possibles ?

IV.3 Ensemble des parties

Proposition 4.88

Soit E un ensemble de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n.$$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- rappeler les définitions des différentes limites en un point et en l'infini,
- étudier l'existence d'une asymptote et sa position locale par rapport à la courbe,
- étudier la limite en un point à l'aide des limites à droite et à gauche,
- appliquer le théorème de la caractérisation séquentielle de la limite/de la continuité,
- maîtriser les opérations sur les limites,
- appliquer le théorème de comparaison,
- appliquer le théorème des gendarmes,
- utiliser les équivalents des fonctions usuelles au voisinage de 0 pour déterminer des limites,
- mémoriser et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires,
- mémoriser et appliquer le théorème de la bijection.

I Limite d'une fonction

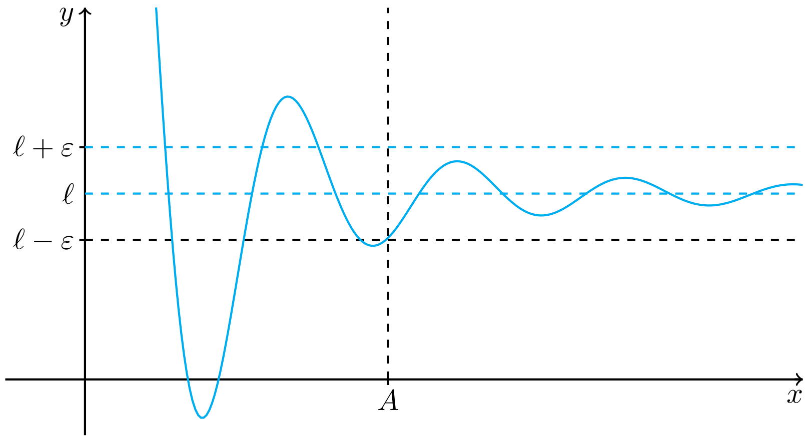
I.1 Limite en l'infini

Définition 5.1. Soient I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbb{R}$ **en** $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in I,\ \forall x \geqslant A, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{+\infty}{\to} \ell$ ou $\displaystyle\lim_{+\infty} f = \ell$.

Illustration 5.2. Quelle que soit la précision ε, les $f(x)$ sont tous proches de la limite à ε près lorsque x est suffisamment grand.



Exemple 5.3. Considérons $f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos(x)}{x} \end{array}$. Alors, f tend vers 0 en $+\infty$.

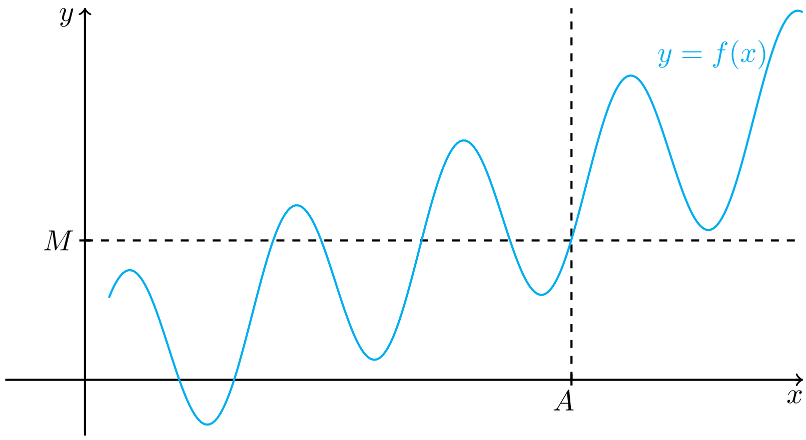
$\boxed{39}$ En s'inspirant de la définition précédente, écrire la définition de «f tend vers ℓ en $-\infty$».

Définition 5.4. Soient I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in I,\ \forall x \geqslant A,\ f(x) \geqslant M.$$

On note alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $f \underset{+\infty}{\to} +\infty$ ou $\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Illustration 5.5. Quel que soit le réel M, les $f(x)$ sont tous plus grands que M lorsque x est suffisamment grand.



Exemple 5.6. Considérons la fonction $f \ : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$. Alors, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

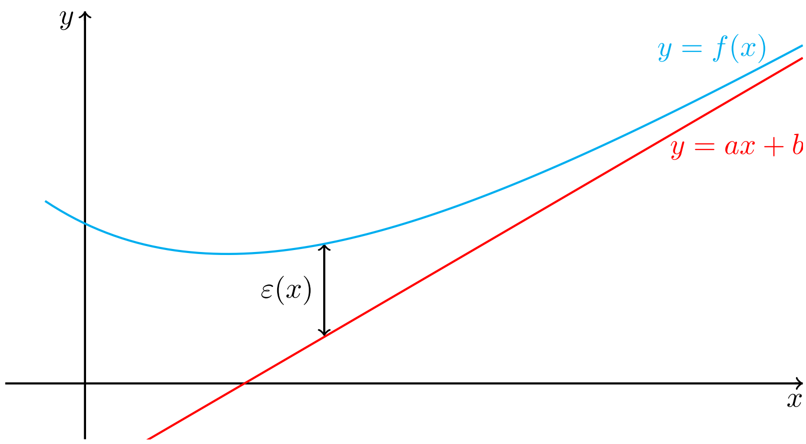
$\boxed{40}$ En s'inspirant de la définition précédente, écrire la définition de «f tend vers $-\infty$ en $-\infty$».

Définition 5.7. Soient I un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que la courbe représentative de f **admet une asymptote oblique en** $+\infty$ (resp. $-\infty$) d'équation $y = ax + b$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \text{au voisinage de } +\infty \text{ (resp. } -\infty), \\ \varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \left(\text{resp. } \varepsilon(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0\right), \end{cases}$$

Illustration 5.8. Autrement dit, la courbe représentative de f se rapproche de la droite d'équation $y = ax + b$ lorsque x tend vers l'infini :

$$f(x) - (ax + b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$



I.2 Limite en un point

I.2.1 Premières définitions

Définition 5.9. Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dira que f est définie **au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si I contient un intervalle de la forme :

$$[a, x_0[\quad \text{ou} \quad]x_0, b] \quad \text{ou} \quad [a, x_0[\cup]x_0, b], \quad \text{ou encore} \quad [a, b] \;\text{ avec } x_0 \in [a, b].$$

Exemple 5.10. Les deux fonctions ci-dessous sont définies au voisinage de 0.

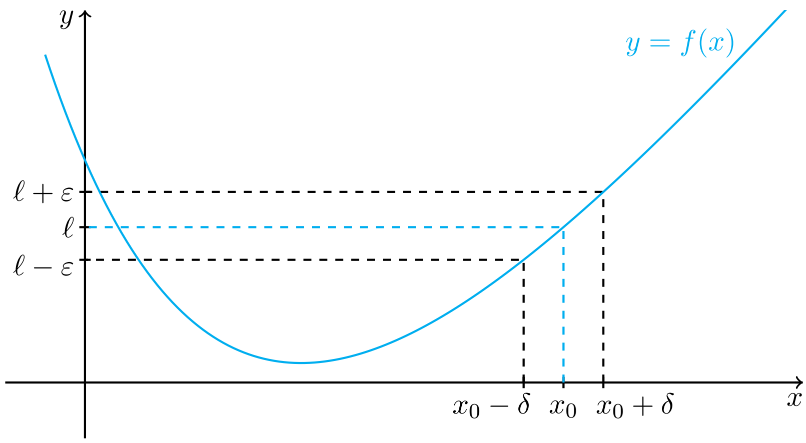
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$$

Définition 5.11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f **admet pour limite** $\ell \in \mathbb{R}$ **en** x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{x_0}{\to} \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Illustration 5.12. Quelle que soit la précision ε, pour x suffisamment proche de x_0, $f(x)$ est proche de ℓ à ε près.



Remarque 5.13. La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour y admettre une limite. Si f est définie en x_0 et que f admet une limite en x_0, alors, cette limite ne peut être que $f(x_0)$.

Exemple 5.14. Soit f la fonction définie par : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ car :

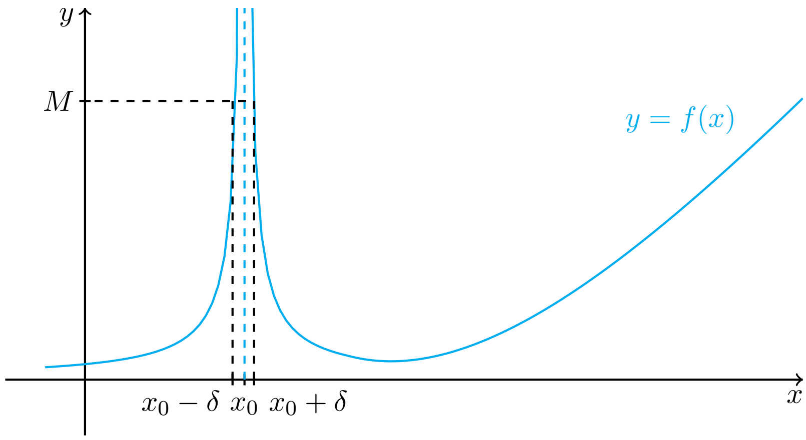
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\; f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Définition 5.15. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** x_0 si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists \delta > 0,\, \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M\Big).$$

On note alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ ou $f \underset{x_0}{\to} +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$.

Illustration 5.16. Quel que soit le réel M, $f(x)$ dépasse M pour tout x suffisamment proche de x_0.



Proposition 5.17 (unicité de la limite)

Si une fonction admet une limite en un point (ou en l'infini), alors cette limite est unique.

I.2.2 Limites à droite et à gauche

Définition 5.18. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f admet une **limite à droite** en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0^+}{\to} \ell.$$

41 En s'inspirant de la définition précédente, écrire ce que signifie avoir une **limite à gauche** en un point pour une fonction.

Exemple 5.19. La fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ vérifie $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Proposition 5.20

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I contenant x_0. Supposons que x_0 n'est pas une extrémité de I.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 5.21. Considérons la fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$. Alors, f n'a pas de limite en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. En effet, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -1$.

Définition 5.22. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

II Carctérisation séquentielle de la limite

Notation 5.23. Soit I un ensemble. On note $I^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans I.

Théorème 5.24 (caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Alors, f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si :

$$\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad \left(u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0 \Longrightarrow f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \right).$$

Remarque 5.25. En général, on utilise ce théorème pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (ou en $\pm\infty$).

42 Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

III Opérations sur les limites

III.1 Opérations algébriques

Proposition 5.26

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I.

(i) Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et que $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors :
- $f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell + \ell'$,
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \lambda \ell$,
- $f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell\ell'$,
- si, de plus, g ne s'annule pas sur I et que $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

(ii) Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

(iii) Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et que f est strictement positive (reps. strictement négative) au voisinage de x_0, alors : $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).

III.2 Limites et relations d'ordre

Définition 5.27. Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. On dira qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage du point** x_0 s'il existe un intervalle ouvert J_{x_0} de centre x_0 tel que la propriété soit vraie sur $J_{x_0} \cap I$.

Remarque 5.28. Cela signifie que cette propriété doit être vraie pour tout x suffisamment proche de x_0.

Définition 5.29. Soit $f\colon [z, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dira qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de l'infini** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que cette propriété soit vraie pour tout $x \geqslant M$.

Théorème 5.30 (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. On suppose que, au voisinage de x_0, $f \leqslant g$.

(i) Si f et g admettent des limites finies en x_0, alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$;

(ii) Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$;

(iii) Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

Théorème 5.31 (des gendarmes)

Soient f, u et v trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. Si :

(i) au voisinage de x_0, $\;u \leqslant f \leqslant v$,

(ii) $\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,

alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Corollaire 5.32

Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. S'il existe une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ et un réel ℓ tels que :

(i) pour tout x au voisinage de x_0, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$,

alors, $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

III.3 Limites et fonctions composées

Théorème 5.33

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. Soient $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soient encore $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0, \\ \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \ell. \end{cases} \implies \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell.$$

IV Comparaison locale de fonctions

Dans tout ce qui suit, f, g et h désignent trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I.

IV.1 Négligeabilité

Définition 5.34. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0 et on note $f =_{x_0} o(g)$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0, \\ \forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x). \end{cases}$$

On écrira encore «au voisinage de x_0, $f = o(g)$» ou «en x_0, $f = o(g)$».

Proposition 5.35

Si g ne s'annule pas sur $I \backslash \{x_0\}$ alors :

$$f =_{x_0} o(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 5.36

Au voisinage de x_0, si f est négligeable devant g et que g est négligeable devant h alors f est négligeable devant h.

Exemples 5.37. Entre autres :

- Au voisinage de $+\infty$, $x^7 = o(\mathrm{e}^x)$.
- En 0, $\ln(x) = o(1/x)$.
- $f =_a o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_a f = 0$.

Théorème 5.38 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors,

(i) $\dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; (ii) $\dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

IV.2 Équivalence

Définition 5.39. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de x_0 et on note $f \sim_{x_0} g$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0, \\ \forall x \in I,\ f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x). \end{cases}$$

Proposition 5.40

$$f \sim_{x_0} g \iff f - g =_{x_0} o(g).$$

Proposition 5.41

Si g ne s'annule pas sur $I\backslash\{x_0\}$ alors :

$$f \sim_{x_0} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1.$$

Remarque 5.42. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Alors :

(i) Si $f \sim_{x_0} g$ et que $\lim\limits_{x_0} g = \ell$, alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$;

(ii) Si $\ell \in \mathbb{R}^\star$, alors $\left(f \sim_{x_0} \ell \iff \lim\limits_{x_0} f = \ell\right)$.

Proposition 5.43

Au voisinage de x_0 :

(i) $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$;

(ii) Si $f \sim g$ et que $g \sim h$ alors $f \sim h$;

(iii) Si $f \sim g$ et que $h \sim k$ alors $fh \sim gk$;

(iv) Si $f \sim g$ et que f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0 alors $1/f \sim 1/g$.

Attention. Comme pour les suites, on ne peut ni additionner ni composer des équivalents.

43 Démontrer que :

1. En $+\infty$, $x^7 + x^2 + \ln(x) \sim x^7$.
2. En 0, $x^2 + x^3 \sim x^2$.

Proposition 5.44

Au voisinage de 0 :

- $\ln(1+x) \sim x$,
- $\sin(x) \sim x$,
- $\cos(x) - 1 \sim -x^2/2$,
- $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$.

44 Déterminer la limite éventuelle en 0 de : $\dfrac{\sin^3(x)}{x^3 + x^4}$.

45 Déterminer la limite éventuelle en 0 de : $\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$.

V Fonctions continues

V.1 Continuité en un point

Définition 5.45. Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en** x_0 si f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0.

Proposition 5.46 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors, f est continue en x_0 ssi pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers x_0, $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Exemple 5.47. Démontrons que la fonction définie ci-dessous n'est pas continue en 0 :

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \dfrac{\pi}{n}$. Alors $(u_n)_n$ converge vers 0 et ne prend pas ses valeurs dans $\mathbb{Q}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, $f(0) = 1$ puisque $0 \in \mathbb{Q}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq f(0),$$

ce qui démontre d'après la proposition précédente que la fonction f n'est pas continue en 0.

V.2 Continuité globale

Définition 5.48. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout point x_0 de I.

Remarque 5.49. Graphiquement, cela signifie qu'on peut tracer le graphe de f sans lever le crayon. Attention cependant à ne pas faire de trait vertical !

Proposition 5.50

Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\lambda f + g$ est continue sur I ;

(ii) fg est continue sur I ;

(iii) si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est continue sur I.

Définition 5.51. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ où I est un ensemble de la forme

$$]x_0, b] \quad \text{ou} \quad [a, x_0[\quad \text{ou} \quad [a, x_0[\cup]x_0, b].$$

On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0.

Exemple 5.52. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{array}$$

Alors, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. En effet : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

46 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ x + k & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array}$$

Déterminer un réel k tel que f soit prolongeable par continuité en 0 : on commencera par tracer le graphe de f en prenant une valeur de k «au hasard».

V.3 Fonctions continues sur un segment

Théorème 5.53

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée sur $[a, b]$ et y atteint ses bornes.

Remarque 5.54. En terme de quantificateurs, cela signifie que

$$\exists x_1 \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad f(x_1) \leqslant f(x),$$

et que

$$\exists x_2 \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant f(x_2).$$

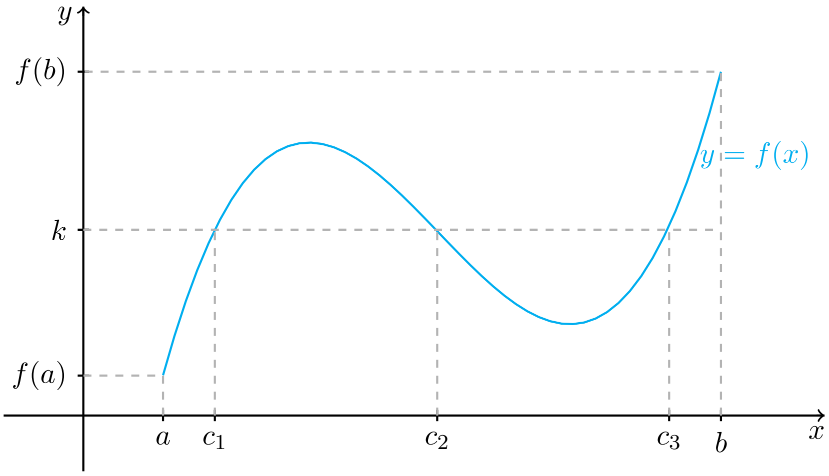
Théorème 5.55 (des valeurs intermédiaires)

Soient $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = k.$$

Remarque 5.56. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Illustration 5.57. La fonction f peut prendre plusieurs fois la valeur k sur l'intervalle $[a, b]$.



V.4 Fonctions monotones

Théorème 5.58 (de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

(i) f réalise une bijection de I sur $f(I)$;

(ii) f^{-1} est continue et strictement monotone, de même monotonie que f ;

(iii) les bornes de $f(I)$ sont les images par f des bornes de I.

Exemple 5.59. Considérons la fonction $f \; : \; \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Alors f est strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$. f réalise donc une bijection de I dans $J = f(I) = [0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est continue de J dans I : c'est la fonction racine carrée.

47 Démontrer que l'équation $\ln(2x+1) + \sin(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.
Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto \ln(2x+1) + \sin(x)$ sur $[0, \pi/4]$.

Proposition 5.60

Lorsque f est bijective, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.