Solution. Calculons la somme ($n \in \mathbb{N}^\star$) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n} |k-n|.$$

On commence par remarquer que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$:

$$k - n \geqslant 0 \iff k \geqslant n.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} |k-n| + \sum_{k=n+1}^{2n} |k-n| \\ &= \sum_{k=0}^{n} -(k-n) + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) \end{aligned}$$

La première somme se calcule simplement par linéarité puisque :

$$\sum_{k=0}^{n}(-k+n) = -\sum_{k=0}^{n} k + n \sum_{k=0}^{n} 1 = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)$$

Quant à la deuxième somme, on peut la calculer soit par changement d'indice (en posant par exemple $p = k - n$), soit de manière directe :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) &= \sum_{k=n+1}^{2n} k - \sum_{k=n+1}^{2n} n \\ &= \sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n} k - n \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - n^2. \end{aligned}$$