1 Compléter avec un symbole approprié (parmi $\in$, $\subset$, $\notin$) :

1) $1\ldots\mathbb{N}$
2) $\{1;2\}\ldots\mathbb{Q}$
3) $\sqrt{2}\ldots\mathbb{R}$
4) $\{-1\}\ldots\mathscr{P}(\mathbb{Z})$
5) $\{\{1;2\};\{\sqrt{2}\}\}\ldots\mathscr{P}(\mathbb{R})$
6) $\varnothing\ldots\mathbb{Q}$

2 Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et soit :

$$f : \begin{array}{rcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & |x+1|-1 \end{array}$$

Déterminer deux ensembles I et J de sorte que :

(i) f soit bijective,
(ii) f soit injective mais non surjective,
(iii) f soit surjective mais non injective,
(iv) f ne soit ni surjective ni injective.

3 L'application ci-dessous est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

4 L'application ci-dessous est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy,0) \end{array}$$

5 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. L'application ci-dessous est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{U}_n \\ k & \mapsto & e^{i2k\pi/n} \end{array}$$

6 On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f
2. En déduire que f établit une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J où J est un intervalle à déterminer.
3. Déterminer la bijection réciproque de $g : x \in \mathbb{R}_- \mapsto f(x) \in J$.

7 On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 \end{array}$$

1. L'application f est-elle surjective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\{i\})$.
3. En déduire que f n'est pas bijective.

8 Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Justifier que f est bijective.
3. La bijection réciproque de f, appelée arc sinus et notée arcsin est la fonction $\sin^{-1}$ de votre calculatrice. Calculer :

$$\arcsin(0),\quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\quad \text{et}\quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. Déterminer
   a) $\sin([0,\pi/6])$,
   b) $\arcsin([0,1/2])$,
   c) $\arcsin^{-1}([0,\pi/6])$.

9 * Soit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } 2x < 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Démontrer que f est bijective.
3. Déterminer la bijection réciproque de f.

10 * Les applications ci-dessous sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & & X & \mapsto & X \cup \{1;2;3\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & & X & \mapsto & X \cap \{2;4;6;7\} \end{array}$$

Indication : on pourra calculer quelques valeurs de $f(X)$ (respectivement $g(X)$) pour des parties X de $\mathbb{N}$ choisies «au hasard».

11 * L'application ci-dessous est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & & X & \mapsto & X \setminus \{0\} \end{array}$$

Indication : on pourra calculer quelques valeurs de $f(X)$ pour des parties X de $\mathbb{N}$ choisies «au hasard».

12 ** Soient E un ensemble contenant au moins deux éléments et A une partie de E non vide et différente de E. Les applications ci-dessous sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & X & \mapsto & X \cup A \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} g & : & \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & X & \mapsto & X \cap A \end{array}$$

Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 10.

13 ** Soit E un ensemble non vide. Les applications ci-dessous sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & (A,B) & \mapsto & A \cup B \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & (A,B) & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

14 ** Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. L'application ci-dessous est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & X & \mapsto & X \setminus \{a\} \end{array}$$

Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 11.