Examen final

MT1A-MT1B-MT1D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 : racines d'un polynôme (7 points)

On considère le polynôme $P(X) = (X^2 + 3X)^2 + (3X + 5)^2$ appartenant à $\mathbb{R}[X]$.

1. (a) Donner le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X)$.
   (b) Justifier que $P(X)$ n'admet aucune racine réelle.
2. (a) Démontrer que si α est une racine complexe de $P(X)$ alors $P(\overline{\alpha}) = 0$
   (b) En considérant que $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, factoriser le polynôme $P(X)$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients complexes.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$.
   (d) En déduire les racines complexes de $P(X)$.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 : autour de la fonction arctan (7 points)

1. Énoncer, sans le démontrer, le théorème des accroissements finis.
2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*} =]0\,,\,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,,\,+\infty[, \quad f(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

   En appliquant le théorème des accroissements finis, démontrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

3. (a) Déterminer la limite de f en zéro.
   (b) On admet que f est dérivable sur $I =]0\,,\,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   (c) En déduire que f est bijective de I sur un intervalle J que l'on précisera.
4. Justifier que f est prolongeable par continuité en zéro.
   On notera encore f la fonction prolongée à l'intervalle fermé $[0\,,\,+\infty[$.
   Que vaut $f(0)$?

Pensez à changer de copie

Exercice 3 : les nombres de Catalan (7 points)

On rappelle que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Pour tout entier naturel n, on note c_n le nombre de Catalan d'ordre n, défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

1. (a) Calculer les réels c_0 et c_1.

   (b) Démontrer que :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

   (c) En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. On considère les suites réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{4^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = S_n + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

   $$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

   $$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

   (c) *On admet que* $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad c_k \leqslant \dfrac{4^k}{k\sqrt{k}}$.

   Prouver que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

   Que peut-on en déduire pour ces deux suites ?