Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Rappelons que par définition, f est continue en 0 si :
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$
Or
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$
puisque, au voisinage de 0 :
$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \sim_0 \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi, f est bien continue en 0.
2. Calculons le taux d'accroissement de f en 0^+. Soit $h > 0$, alors :
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} - 1}{h} = \frac{\mathrm{e}^h - 1 - h}{h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2/2}{h^2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1/2$.
3. La dérivabilité à gauche en 0 de f ne pose pas de problème puisque la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^\infty$. Or :
$$\forall x < 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{(1-x)^2},$$
donc $f'_g(0) = 2$.
4. On déduit des deux questions précédentes que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à gauche et à droite en 0 ne coïncident pas.
5. On remarque que :
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$
où la deuxième limite est obtenue à l'aide du théorème de croissances comparées.
6. On a déjà calculé la dérivée de f sur $\mathbb{R}_-^\star$. Calculons-la sur $\mathbb{R}_+^\star$:
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2}.$$
On en déduit (en utilisant l'indication de l'énoncé) que :
$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) > 0.$$
Comme f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points, f est strictement croissante. On peut maintenant dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

7. (a) Rappelons que, pour tout $x < 0$:

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ puisque :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Soit $x \leqslant 0$. Alors :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} > 0.$$

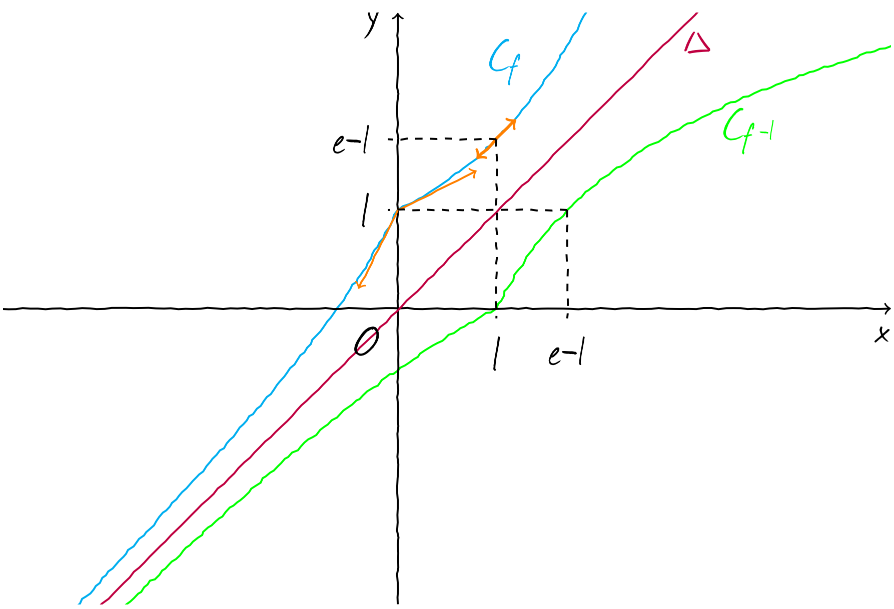
Donc, $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0]$.

(c) Soit T la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1. Alors, d'après le cours, l'équation de T est donnée par :

$$y = f(1) + (x-1)f'(1).$$

Donc, T a pour équation $y = \mathrm{e} - 2 + x$.

(d) Sur le graphe, on doit faire apparaître tout ce qui a été vu précédemment, à savoir : les dérivées à droite et à gauche en 0, l'asymptote Δ et la tangente T. On a aussi tracé ici la courbe représentative de f^{-1} pour répondre à la dernière question.



8. La fonction f est strictement croissante. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. De plus, d'après le tableau de variations, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2.

1. Après calculs, on obtient :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\forall k \geqslant 3, \quad B^k = \mathbb{O}_3.$$

2. On peut appliquer la formule du binôme car les matrices I_3 et B commutent (i.e. $I_3B = BI_3$). On a alors :

$$(B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}.$$

3. Pour $n = 0$ on a $A^0 = I_3$ et pour $n = 1$, $A^1 = A$. Soit $n \geqslant 2$, alors :

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

Finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3.

1. Comme α est une racine double, on sait d'après le cours que :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0.$$

2. le polynôme P est à coefficients réels. On sait dans ce cas que si α est une racine complexe de P, alors il en est de même pour $\overline{\alpha}$. En appliquant le même argument à P', on en déduit que $\overline{\alpha}$ est racine double de P.
3. P est un polynôme de degré 4 admettant pour racines doubles α et $\overline{\alpha}$. On en déduit immédiatement que :

$$P(X) = (X - \alpha)^2 (X - \overline{\alpha})^2.$$

Attention : le coefficient dominant de P ne doit pas être omis lors de l'écriture sous forme factorisée (ici il vaut 1).

4. La factorisation de P sur $\mathbb{R}[X]$ est obtenue en regroupant les racines conjuguées de P. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= ((X - \alpha)(X - \overline{\alpha}))^2 \\ &= \left((X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha}\right)^2 \\ &= (X^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)X + |\alpha|^2) \cdot (X^2 - 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)X + |\alpha|^2). \end{aligned}$$

5. En utilisant l'expression factorisée de P donnée à la question 3, on trouve :

$$P(0) = (0-\alpha)^2(0-\overline{\alpha})^2 = (\alpha\overline{\alpha})^2 = |\alpha|^4$$

Or, $P(0) = 0$ par définition de P. On en déduit que $|\alpha| = 1$ (car c'est un nombre réel positif).

6. En développant l'expression donnée à la question 3, on trouve :

$$P(X) = X^4 - 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)X^3 + (2|\alpha|^2 + 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)^2)X^2 - 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)|\alpha|^2X + |\alpha|^4.$$

Par identification avec les coefficients du polynôme P, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} -4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha) = -2 \\ 2|\alpha|^2 + 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)^2 = 3 \\ -4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)|\alpha|^2 = -2 \\ |\alpha|^4 = 1 \end{cases}$$

On en déduit alors que $\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha) = 1/2$ puis que $\mathcal{I}\mathrm{m}(\alpha) = \pm\sqrt{3}/2$.