Mathématiques générales - MTA1/MTA2
Tronc Commun
Final - Automne 2014

L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part.

Exercice 1 (Analyse : 10 points)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant :
$$e^x - 1 - x \underset{(x\to 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$
3. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
5. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Dresser le tableau de variations de f. On pourra utiliser le résultat suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x(x-1) + 1 \geqslant 0.$$
7. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Déterminer l'équation de l'asymptote Δ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Déterminer les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
   (c) Détermier l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.
   (d) Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$: on prendra soin de représenter tous les éléments étudiés dans l'énoncé. On prendra pour unité graphique 2cm.
   Indication : $e \simeq 2,72$.
8. Montrer que f est bijective (on ne demande pas de déterminer f^{-1}).
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de f^{-1} sur le dessin précédent.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 (Matrices : 5 points)**.**

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$ où I_3 représente la matrice identité.

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire B^n pour $n \geq 3$.
2. Développer $(I_3 + B)^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pensez à changer de copie

Exercice 3 (Polynômes : 5 points)**.**
On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée α ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer α.

1. Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$?
2. En déduire que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine double de P.
3. Montrer que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$P(X) = (X - \alpha)^2 (X - \overline{\alpha})^2.$$

4. En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
6. Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer α (ou $\overline{\alpha}$).