Mathématiques - MT11

Tronc commun

Final - Automne 2011

Durée de l'épreuve : 2 heures

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.

Exercice 1 (4 points)

1. **Question de cours**
   Soit P un polynôme à coefficients réels, et a un nombre réel. Montrer qu'il y a une équivalence entre :
   (i) a est une racine de $P(X)$
   (ii) $X - a$ divise $P(X)$

2. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = X^6 - 1$.

Exercice 1 (4 points)

1. **Question de cours**
   Soit P un polynôme à coefficients réels, et a une racine de multiplicité k (où k est un entier naturel non nul). Montrer qu'alors a est une racine de multiplicité $k - 1$ du polynôme dérivé $P'(X)$.

2. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = X^4 + 1$.

Exercice 2 (8 points)

On rappelle que, par définition, pour toute matrice carrée M d'ordre 3, $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que $\mathbb{O}_3$ désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.

Soit p un entier naturel non nul.
Une matrice carrée M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice p si $M^p = \mathbb{O}_3$ et $M^{p-1} \neq \mathbb{O}_3$.
Une matrice M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'elle est nilpotente d'indice p pour un certain entier naturel p non nul.

Pour toute matrice nilpotente $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$$

(la matrice M étant nilpotente, la somme précédente est toujours finie).

Partie A

On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, B^2 et B^3. En déduire que A et B sont nilpotentes.

2. Calculer $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

3. Vérifier que $\exp(A)$ est inversible et préciser son inverse $\exp(A)^{-1}$.

4. On pose $C = A + B$ et on se donne la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer le nombre réel λ tel que $C\,X = \lambda \cdot X$.

   (b) En déduire que C n'est pas nilpotente.

Partie B

Soit M une matrice nilpotente d'indice 2 et N une matrice nilpotente d'indice 3, deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $M\,N = N\,M$.

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(M+N)^4$.
   En déduire que $M + N$ est nilpotente.

2. Démontrer la relation : $\exp(M+N) = \exp(M)\,\exp(N)$.

3. Simplifier le produit $\exp(N)\,\exp(-N)$.

   En déduire que $\exp(N)$ est inversible et exprimer son inverse $\exp(N)^{-1}$ comme combinaison linéaire de I_3, N et N^2.

Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 2\,x\,\cosh(x) = x\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Partie A

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0\,;\,1]$, $\quad f\,(x) - x > 0$.
2. Prouver que f réalise une bijection de $[0\,;\,1]$ sur un intervalle que l'on déterminera.

   On note f^{-1} la bijection réciproque de f.
   Dresser les tableaux de variation de f et de f^{-1}.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f.

Partie B

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} & = & f^{-1}\,(u_n) \end{array}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \in]0\,;\,1]$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. On pose pour tout entier naturel n : $\;a_n = 2^n\,u_n$.

   (a) Vérifier que $\;\forall\, n \in \mathbb{N},\; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{\cosh(u_{n+1})}$. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Prouver que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.