Exercice 1

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur son ensemble de définition. De plus :

$$\forall x \in]-1,+\infty[\ ,\ g'(x) = \frac{10}{1+x} + 2(1+x) > 0.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖	$+$	
variations de g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction g étant continue et strictement monotone sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection, elle établit une bijection de I sur $J = g(]-1,+\infty[)$. De plus, par continuité et croissance de g, on a :

$$J =]\lim_{x\to -1} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}.$$

3. Comme $0 \in J$ et que g est bijective de I sur J, il existe une unique solution dans I à l'équation $g(x) = 0$.

Partie B

1. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[$. En effet, sur cet ensemble le dénominateur ne s'annule pas et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ a pour domaine de définition $]-1,+\infty[$.

2. (a) La fonction f admet pour limite $+\infty$ en -1 (il n'y a pas de forme indéterminée ici). Quant à sa limite en $+\infty$ on peut la déterminer à l'aide d'un équivalent puisque :

$$f(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) Pour montrer que Δ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$, on calcule :

$$\forall x > -1, \quad f(x) - (x-1) = \frac{-1-10\ln(1+x)}{1+x} = -\frac{1}{1+x} - 10\,\frac{\ln(1+x)}{1+x},$$

et on remarque que cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ par croissances comparées.

3. (a) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition par composition, somme et rapport de fonctions qui le sont. Un simple calcul montre que :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}.$$

$f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

(b) On peut maintenant dresser le tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) On sait que :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + o(x)$$

Or, d'après le cours, on peut intégrer les développements limités et on reconnaît ici la dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$. On en déduit que :

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

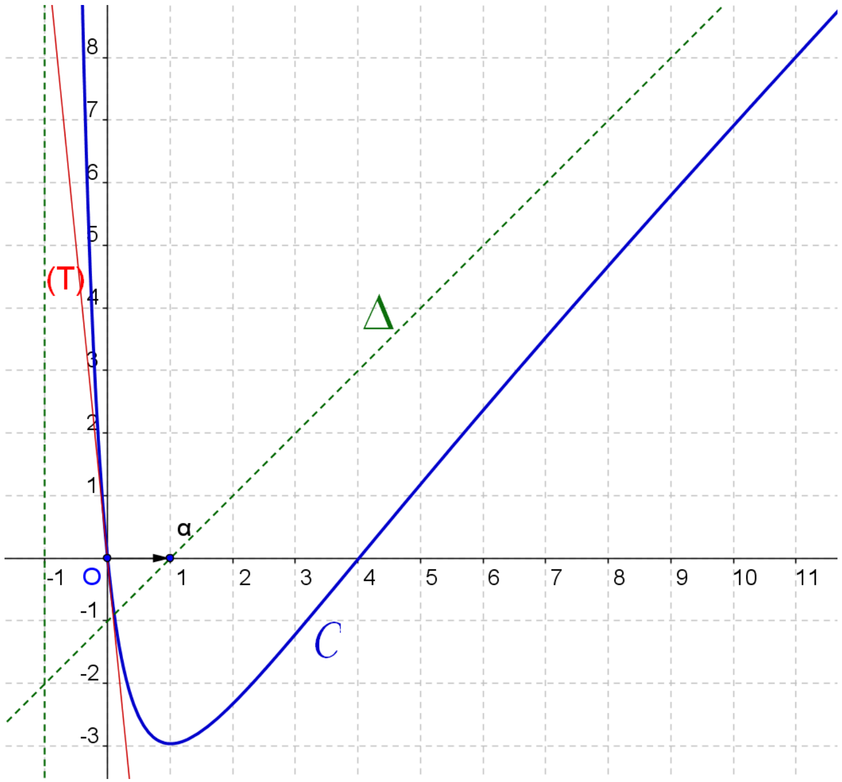
(b) On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2 - 10x + 10\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)) \times \frac{1}{1+x} \\
&= (-10x + 6x^2 + x^2\varepsilon_3(x))(1 - x + x^2 + x^2\varepsilon_4(x)) \\
&= -10x + 10x^2 + 6x^2 + x^2\varepsilon_5(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0 \\
&= -10x + 16x^2 + x^2\varepsilon_5(x).
\end{aligned}$$

(c) On déduit de la question précédente que l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f en $O(0\,,\,0)$ est $y = -10x$. De plus, cette tangente est située localement en-dessous de $\mathscr{C}$ au voisinage de O puisque, pour tout réel x proche de 0 :

$$f(x) - (-10x) = 16x^2 + x^2\varepsilon_5(x) = x^2(16 + \varepsilon_5(x)) \geqslant 0$$

Finalement, on peut tracer l'allure du graphe de la fonction f.



Exercice 2

Partie A

1. (a) $S(1) = 3 - 4 + 1 = 0$ et $S'(X) = 12X^3 - 12X^2$ d'où $S'(1) = 0$.

   (b) On en déduit que 1 est une racine de $S(X)$ d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2. Donc $(X-1)^2$ divise $S(X)$.

   Posons la division euclidienne de $S(X)$ par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 3X^4 & -\ 4X^3 & & & +1 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{7-7}
- & (3X^4 & -\ 6X^3 & +\ 3X^2) & & \downarrow & 3X^2 + 2X + 1 \\ \cline{1-4}
 & & 2X^3 & -\ 3X^2 & & +1 & \\
 & - & (2X^3 & -\ 4X^2 & +\ 2X) & \downarrow & \\ \cline{2-5}
 & & & X^2 & -\ 2X & +1 & \\
 & & - & (X^2 & -\ 2X & +1) & \\ \cline{3-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

   On en déduit que $S(X) = (X-1)^2(3X^2 + 2X + 1)$. Or le discriminant du trinôme $3X^2 + 2X + 1$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8 < 0$. Donc le polynôme $3X^2 + 2X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi la décomposition de $S(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\boxed{S(X) = (X-1)^2(3X^2 + 2X + 1)}$$

   (c) $S(X)$ étant scindé sur $\mathbb{C}$, il reste à factoriser $3X^2 + 2X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Le trinôme $3X^2 + 2X + 1$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{8}}{2 \times 3} = \frac{-2 - 2\,i\sqrt{2}}{2 \times 3} = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$$

   Donc $3X^2 + 2X + 1 = 3(X - z_1)(X - z_2)$ puis

$$\boxed{S(X) = 3(X-1)^2\left(X + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$$

2. On pose $T(X) = 4\,X^5 - 5\,X^4 + 1$.

(a) On développe le second membre de l'égalité à prouver :
$(X-1)^2\,(4\,X^3+3\,X^2+2\,X+1)$
$=(X^2-2X+1)\,(4\,X^3+3\,X^2+2\,X+1)$
$=4X^5+3X^4+2X^3+X^2-8X^4-6X^3-4X^2-2X+4X^3+3X^2+2X+1$
$=4X^5+(3-8)X^4+(2-6+4)X^3+(1-4+3)X^2+(-2+2)X+1$
$=4X^5-5X^4+1$
$=T(X)$

(b) Le polynôme $4X^5-5X^4+1$ étant de degré 3, il admet trois racines a, b et c dans $\mathbb{C}$. A priori, ces racines ne sont pas nécessairement deux à deux distinctes. Mais on verra dans la partie B que les racines de $4X^5-5X^4+1$ sont d'ordre de multiplicité égal à 1. Donc $a\neq b$ et $a\neq c$ et $b\neq c$.

$$4\,X^3+3\,X^2+2\,X+1=4(X-a)(X-b)(X-c)\ .$$

(c) • Relation entre les coefficients du polynôme $4X^5-5X^4+1$ et ses racines.

$4(X-a)(X-b)(X-c)=4[X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$
Par identification des coefficients, on obtient

$$a+b+c=-\frac{3}{4}\ \text{ et }\ abc=-\frac{1}{4}$$

• D'où $\sigma=\dfrac{1}{a\,b}+\dfrac{1}{b\,c}+\dfrac{1}{a\,c}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{-3/4}{-1/4}=3$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul fixé.

1. $P_n'(X)=n(n+1)\,X^n-(n+1)n\,X^{n-1}=n(n+1)\,X^{n-1}(X-1)$.

2. • Montrons que 1 est une racine multiple de $P_n(X)$.
$P_n(1)=n\,1^{n+1}-(n+1)\,1^n+1=n-(n+1)+1=0$
et $P_n'(1)=n(n+1)\,1^{n-1}(1-1)=0$. Donc 1 est une racine de $P_n(X)$, dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.
   • Montrons qu'il n'y a pas d'autre racine *multiple* de $P_n(X)$.
Soit α une racine multiple de $P_n(X)$. Alors $P_n(\alpha)=0$ et $P_n'(\alpha)=0$.
D'où $\quad n\,\alpha^{n+1}-(n+1)\,\alpha^n+1=0 \quad$ et $\quad n(n+1)\,\alpha^{n-1}(\alpha-1)=0$.
On déduit de la dernière égalité $\quad \alpha^{n-1}=0 \quad$ ou $\quad (\alpha-1)=0$.
Donc $\alpha=0$ ou $\alpha=1$.
Or $P_n(0)=1\neq 0$. Donc nécessairement $\alpha=1$.

3. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

(a) • Soit x un nombre réel fixé différent de 1. On reconnaît que $f(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison x et de premier terme 1.
Donc $\ f(x)=1\times\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\overset{(\star)}{=}\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

• En tant que fonction polynômiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

et $\ \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=0+1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$\text{Par conséquent }\ \forall x\in\mathbb{R},\ \boxed{f'(x)=\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}}$$

D'autre part, en utilisant l'expression $(\star)$ de $f(x)$ valable pour tout réel $x\neq 1$, on obtient :
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ f'(x)=\dfrac{(n+1)\,x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)\times 1}{(x-1)^2}$
$=\dfrac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\dfrac{n\,x^{n+1}-(n+1)\,x^n+1}{(x-1)^2}$

$$\text{Ainsi }\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ \boxed{f'(x)=\frac{P_n(x)}{(x-1)^2}}$$

(b) La question précédente permet d'obtenir :

pour tout nombre réel $x\neq 1$, $\qquad P_n(x)=(x-1)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}$.

Le polynôme $P_n(X)-(X-1)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,X^{k-1}$ admet donc une infinité de racines (tous les réels x différents de 1).
Or le polynôme nul est **le seul** polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une une infinité de racines.
Donc $\ P_n(X)-(X-1)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,X^{k-1}=0$

c'est-à-dire $\ P_n(X)=(X-1)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,X^{k-1}$

Finalement le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $(X-1)^2$ est

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k\,X^{k-1}=1+2\,X+3\,X^2+4\,X^3+\cdots+n\,X^{n-1}}$$