Mathématiques - MT11

Tronc commun

Final - Automne 2012

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants ne doivent faire usage d'aucun matériel électronique.

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.
Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par :
$$g(x) = 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10$$
2. Montrer que g est bijective de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. En déduire que l'équation $10\ln(1+x)+x^2+2x-10=0$ admet une unique solution. On désignera par α cette solution dans la suite de l'exercice.

Partie B

On définit la fonction f par :
$$f(x) = \frac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$$
On désigne par $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
   *On pourra utiliser la partie **A**. pour étudier le signe de f'.*
4. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.
   On ne se contentera pas de donner la réponse, mais on démontrera la formule.
   (b) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro.
   (c) En déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en zéro ainsi que la position locale de cette tangente (T) par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

Pensez à changer de copie.

<u>Exercice 2</u> (10 points) *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

1. On considère le polynôme $S(X) = 3\,X^4 - 4\,X^3 + 1$.
   (a) Calculer $S(1)$ et $S'(1)$.
   (b) En déduire que $(X-1)^2$ divise $S(X)$ et déterminer la décomposition de $S(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Décomposer $S(X)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On pose $T(X) = 4\,X^5 - 5\,X^4 + 1$.
   (a) Vérifier que $T(X) = (X-1)^2\,(4\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1)$.
   (b) On désigne par a, b et c les racines complexes du polynôme $4\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1$. Factoriser $4\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1$ en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Calculer la somme
   $$\sigma = \frac{1}{a\,b} + \frac{1}{b\,c} + \frac{1}{a\,c}$$

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par

$$P_n(X) = n\,X^{n+1} - (n+1)\,X^n + 1$$

1. Calculer son polynôme dérivé $P_n'(X)$.
2. Démontrer que 1 est la seule racine multiple de $P_n(X)$, *c'est-à-dire la seule racine dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.*
3. On considère la fonction polynômiale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
   $$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$
   (a) En identifiant $f(x)$ comme étant la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique, calculer de deux façons différentes $f'(x)$ pour $x \neq 1$.
   (b) En déduire le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $(X-1)^2$.