utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

Mathématiques - MT11

Tronc commun

Final - Automne 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.
Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (8 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. Soit P un polynôme à coefficients réels $\qquad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$

   Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

2. On considère le polynôme

$$Q = -X^5 + 2X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 8X.$$

   (a) Vérifier que $Q(i) = 0$.

   (b) Sans effectuer de calcul, montrer que Q est divisible par $X^2 + 1$.

   (c) Décomposer Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.

Partie B

Pour tout nombre réel x, on considère la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $M(x)M(y)$. Que remarque-t-on ?

2. En déduire que $M(x)$ est inversible et donner son inverse.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $M(x)^n$.

4. Calculer A^7 où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 (12 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}^+ = [0\,,\,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue en 0.
2. (a) f est-elle dérivable en 0 ? Pourquoi ?
   (b) Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On précisera sa limite en $+\infty$.
4. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$ du plan. *On prendra 2 cm pour unité graphique.*
   (a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale en l'origine O.
   (b) Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses $(O\,;\overrightarrow{i})$.
   (c) Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   (d) Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ en faisant apparaître la tangente (T).
   On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$ *et* $\ln 2 \approx 0,69$.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique nombre réel u_n, $u_n > 1$, tel que $f(u_n) = n$. *On définit ainsi une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
7. Prouver que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.
8. On rappelle que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \ln(u_n) = n$.
   (a) Justifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(u_n) + \ln[\ln(u_n)] = \ln(n)$
   (b) En déduire que
   $$\ln(u_n) \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \ln(n)$$
   (c) Proposer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.