# Corrigé

## Exercice 1 : Continuité et dérivabilité

1. Pour montrer que $f$ est continue en 1, il suffit de vérifier que :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

On calcule alors les limites à droite et à gauche de $f$ en 1. Pour ce faire, on remarque que
— lorsque $x \overset{>}{\to} 1$ : $\lfloor x \rfloor = 1$,
— lorsque $x \overset{<}{\to} 1$ : $\lfloor x \rfloor = 0$.
D'où :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 1 + \sqrt{1-1} = 1,$$
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 0 + \sqrt{1-0} = 1.$$

Finalement, $f(1) = 1$, d'où le résultat.

2. Soit $x \in [1; 1,5[$, alors $\lfloor x \rfloor = 1$ et :

$$\boxed{\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+\sqrt{x-1}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite en 1.}}$ Sa courbe représentative y admet une demi-tangente verticale orientée vers le haut.

3. Soit $x \in [0,5; 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{0+\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 1}}$, de dérivée $\frac{1}{2}$.

4. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en 1}}$ puisqu'elle n'est pas dérivable à droite en 1.

# Exercice 2 : Suites

1. Soit $x \geq 3$. Alors $x > \mathrm{e}$ (puisque $\mathrm{e} < 3$). La fonction ln étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on a $\ln x > \ln \mathrm{e} = 1$, et donc
$$1 + 8\ln x > 1 + 8 = 9.$$
Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on en déduit que
$$\sqrt{1+8\ln x} > \sqrt{9} = 3, \quad \text{i.e.} \quad f(x) > 3.$$
On a donc démontré que : $\boxed{x \geq 3 \Longrightarrow f(x) \geq 3.}$

2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $I$. On pose pour tout $x \in I$, $u(x) = 1 + 8\ln x$, de sorte que $f(x) = \sqrt{u(x)}$. La fonction $u$ vérifie : $\forall x \in I, \quad u'(x) = \frac{8}{x}$.
Soit $x \in I$. On a alors :
$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{8}{x}}{2\sqrt{1+8\ln x}} = \frac{4}{x\sqrt{1+8\ln x}} = \frac{4}{xf(x)}.}$$
On remarque que $f'(x) \geq 0$ et donc que :
$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{4}{xf(x)}.$$
Puisque $x \geq 3$, on a $f(x) \geq 3$ (d'après 1) et donc $xf(x) \geq 9$. Ainsi :
$$\boxed{|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.}$$

3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) On rappelle que $I = [3;+\infty[$. On a vu à la question 1 que pour tout $x \geq 3$, $f(x) \geq 3$ ce qui revient à dire que $f(I) \subset I$. Puisque $u_0 = 3$, on a $u_0 \in I$. Une récurrence immédiate donne :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f$ étant dérivable sur $I$, elle y est aussi continue. Par ailleurs, d'après l'énoncé : $\alpha \in I$. On en déduit donc que $f$ est dérivable (et donc continue) entre les bornes $u_n \in I$ et $\alpha \in I$. De plus, d'après la question 2, $f'$ est bornée sur $I$ et donc entre les bornes $u_n$ et $\alpha$ par la constante $\frac{4}{9}$. L'inégalité des accroissements finis permet donc de conclure que :
   $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.$$
   Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$. L'inégalité précédente se traduit donc :
   $$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.}$$

   (b) Démontrons par récurrence sur $n$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
   — **Initialisation.** D'après l'énoncé $\alpha \in I$ et $\alpha \leq 4$ donc $3 \leq \alpha \leq 4$. Puisque $u_0 = 3$, on a donc :
   $$|u_0 - \alpha| = |3 - \alpha| = \alpha - 3 \leq 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0,$$
   donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

D'après la question 3a, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$. On en déduit donc que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.$$

— **Conclusion.** On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.}$$

(c) D'après la question 3b,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

On remarque que $0 < \frac{4}{9} < 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. Le théorème des gendarmes permet donc de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0,$$

ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$

## Exercice 3 : Matrices et polynômes

1. (a) $x_1 = 1$ est une racine évidente du polynôme $X^2 - 4X + 3$.
   En notant $x_2$ l'autre racine, on sait que $x_1 x_2 = \frac{3}{1}$ d'où $x_2 = 3$ puis

   $$\boxed{X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3).}$$

   (b) D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes tel que $X^n = (X^2 - 4X + 3)\,Q(X) + R(X)$, avec $\deg(R(X)) < 2$.
   Donc le reste $R(X)$ est de degré au plus 1 : $\exists\,!(\alpha_n\,,\,\beta_n) \in \mathbb{R}^2\ ;\ R(X) = \alpha_n\,X + \beta_n$.

   (c) On a $X^n = (X^2 - 4X + 3)\,Q(X) + \alpha_n\,X + \beta_n$.
   En évaluant cette égalité de polynômes en 3 puis en 1, on obtient :

   $$\left\{\begin{array}{l} 3^n = (3^2 - 12 + 3)\,Q(3) + 3\,\alpha_n + \beta_n \\ 1^n = (1^2 - 4 + 3)\,Q(1) + \alpha_n + \beta_n \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3^n & = & 3\,\alpha_n + \beta_n \\ 1 & = & \alpha_n + \beta_n. \end{array}\right.$$

   On en déduit par soustraction membre à membre que $3^n - 1 = 3\,\alpha_n - \alpha_n = 2\,\alpha_n$, d'où $\alpha_n = \frac{3^n-1}{2}$. Par suite, $\beta_n = 1 - \alpha_n = 1 - \left(\frac{3^n-1}{2}\right) = \frac{3-3^n}{2}$. Ainsi :

   $$\boxed{R(X) = \frac{(3^n-1)}{2}\,X + \frac{(3-3^n)}{2}.}$$

2. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$,

   et $A^2 - 4A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_3$.

   (b) On déduit de l'égalité matricielle précédente que
   $3\,I_3 = 4\,A - A^2 = 4\,A\,I_3 - A\,A = A\,(4\,I_3 - A)$.
   D'où $\frac{1}{3}A\,(4\,I_3 - A) = I_3$ puis $A\underbrace{\left(\frac{1}{3}(4\,I_3 - A)\right)}_{B} = I_3$.

   On a donc trouvé une matrice $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A\,B = I_3$ ce qui signifie que $A$ est inversible et que $\boxed{A^{-1} = B = \frac{4}{3}\,I_3 - \frac{1}{3}\,A}$.

   On a donc $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. On a vu en 1.(c) que $X^n = (X^2 - 4X + 3)\,Q(X) + \alpha_n\,X + \beta_n$.

   En évaluant cette égalité de polynômes en $A$, on obtient :

   $$A^n = (A^2 - 4A + 3\,I_3)\,Q(A) + \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3$$

   Or, d'après 2.(a), $A^2 - 4A + 3I_3 = \mathbb{O}_3$.
   Donc $A^n = \underbrace{\mathbb{O}_3\,Q(A)}_{\mathbb{O}_3} + \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3 = \mathbb{O}_3 + \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3 = \alpha_n\,A + \beta_n\,I_3$. Finalement :

   $$\boxed{A^n = \frac{(3^n-1)}{2}\,A + \frac{(3-3^n)}{2}\,I_3.}$$

Correction

| Nom : ........................................ Prénom : ........................................ |
|---|

## Exercice 4 : QCM ............................................................5 points

Pour chacune des questions ci-dessous, une et une seule des réponses proposées est exacte. Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être complètement **noircies**. Il est donc impératif de rendre le sujet et d'y inscrire ses **nom** et **prénom** dans l'emplacement réservé.

**Question 1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?

- ☐ Si $f$ est décroissante et que $u_0 \leqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si $f$ est décroissante et que $u_0 \geqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ☐ Si $f$ est croissante et que $u_0 \leqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- ■ Si $f$ est croissante et que $u_0 \geqslant u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.

**Question 2** Parmi ces applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle est bijective ?

- ☐ $k : x \mapsto |x|$
- ☐ $h : x \mapsto x^2$
- ☐ $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$
- ■ $f : x \mapsto x^3$

**Question 3** Laquelle de ces égalités est vraie ?

- ☐ $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}$
- ■ $\tan(\pi/4) = 1$
- ☐ $\tan(\pi/2) = \sqrt{3}$
- ☐ $\tan(\pi/3) = \sqrt{2}$

**Question 4** Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

- ☐ $z^2 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$.
- ☐ Un argument de $z^2$ est $3\pi/4$.
- ☐ Le module de $z^2$ est 2.
- ■ La partie imaginaire de $z^2$ est l'opposé de sa partie réelle.

**Question 5** Soit $f : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. La négation de l'assertion : $\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ \big[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big]$ est l'assertion...

- ■ $\exists x > 0,\ \exists y > 0,\ \big(x < y\big)$ et $\big(f(x) \geq f(y)\big)$
- ☐ $\exists x \leq 0,\ \exists y \leq 0,\ \big[x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big]$
- ☐ $\exists x \leq 0,\ \exists y \leq 0,\ \big(x < y\big)$ et $\big(f(x) \geq f(y)\big)$
- ☐ $\exists x > 0,\ \exists y > 0,\ \big[f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y\big]$