Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)\,k! = (k+1)!$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)-1\big) \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\,k! - \sum_{k=1}^{n} k!$, et donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!,$$

d'après la question 1.

(b) En effectuant un changement de variable dans la première somme du terme de droite de l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} k! \;+\; (n+1)!\right) - \left(1! + \sum_{k=2}^{n} k!\right) \\ &= (n+1)! - 1! \\ &= (n+1)! - 1, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$, et donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$T_n = (1+1)^n = 2^n.$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{(n+1)!-1}{2^n} = \dfrac{(n+1)!}{2^n} - \dfrac{1}{2^n}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\frac{n!}{2^n}.$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$. De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)\frac{n!}{2^n} = +\infty$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{T_n} = +\infty.$$

Correction de l'exercice 2.

1. $\forall z \in E,\ 1 - f(z) = 1 - \dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{(z+i)-(z-i)}{z+i} = \dfrac{2i}{z+i} \neq 0$, car $i \neq 0$.

2. f est bijective si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'équation $f(z) = \alpha$ admet une unique solution $z \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour tout $z \in E$,

$$f(z) = \alpha \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = \alpha \Leftrightarrow z - i = \alpha(z+i) \Leftrightarrow z - \alpha z = \alpha i + i \Leftrightarrow (1-\alpha)z = (1+\alpha)i \Leftrightarrow z = i\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \text{ car } \alpha \neq 1.$$

L'équation $f(z) = \alpha$ admet donc une unique solution $z = i\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$ qui appartient à E (car $i\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} \neq -i$). On en déduit donc que f est bijective et que sa bijection réciproque f^{-1} est donnée par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & E \\ \alpha & \mapsto & i\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} \end{array}.$$

3. Pour tout $z \in E$,

$$
\begin{aligned}
1-|f(z)|^2 &= 1-\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = 1-\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{|z+i|^2-|z-i|^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big|\,(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))+i\big|^2-\big|\,(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))-i\big|^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big|\mathrm{Re}(z)+i\,(\mathrm{Im}(z)+1)\,\big|^2-\big|\mathrm{Re}(z)+i\,(\mathrm{Im}(z)-1)\,\big|^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big(\,(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2\,\big)-\big(\,(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2\,\big)}{|z+i|^2}\\
&= \frac{(\mathrm{Im}(z)+1)^2-(\mathrm{Im}(z)-1)^2}{|z+i|^2}\\
&= \frac{\big(\,(\mathrm{Im}(z)+1)-(\mathrm{Im}(z)-1)\,\big)\times\big(\,(\mathrm{Im}(z)+1)+(\mathrm{Im}(z)-1)\,\big)}{|z+i|^2}\\
&= \frac{2\times 2\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}\\
&= 4\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}.
\end{aligned}
$$

4. (a) $f(\mathbb{R})=\big\{f(z),\ z\in\mathbb{R}\big\}$.

   (b) Il s'agit de montrer que : $\forall z\in\mathbb{R},\ f(z)\in U\setminus\{1\}$. On rappelle que $U=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$. Soit $z\in\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{Im}(z)=0$. D'après la question 3, on en déduit que $1-|f(z)|^2=0$, i.e. $|f(z)|=1$. Donc $f(z)\in U$. Mais puisque f est à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on sait que $f(z)\neq 1$. Ainsi, $f(z)\in U\setminus\{1\}$. On a donc démontré que : $f(\mathbb{R})\subset U\setminus\{1\}$.

   (c) Soit $\alpha\in U\setminus\{1\}$. Soit $z\in E$ tel que $\alpha=f(z)$. Montrons que $z\in\mathbb{R}$. D'après la question 3, on a

$$4\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}=1-|f(z)|^2=1-|\alpha|^2.$$

   Puisque $\alpha\in U$, on a $|\alpha|=1$, donc $4\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}=0$. On en déduit donc que $\mathrm{Im}(z)=0$, c'est-à-dire que $z\in\mathbb{R}$.

   (d) D'après la question 4b, $f(\mathbb{R})\subset U\setminus\{1\}$. D'autre part, dans la question 4c, on a montré que tout $\alpha\in U\setminus\{1\}$ s'écrit $\alpha=f(z)$ avec $z\in\mathbb{R}$ et donc que $U\setminus\{1\}\subset f(\mathbb{R})$. D'où l'égalité :

$$f(\mathbb{R})=U\setminus\{1\}.$$

Correction de l'exercice 3.

1. $\mathrm{non}\big(\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in[M,+\infty[,\ |\mathrm{e}^{-x}|\le\varepsilon\big)\ \equiv\ \big(\exists\varepsilon>0,\ \forall M\in\mathbb{R},\ \exists x\in[M,+\infty[,\ |\mathrm{e}^{-x}|>\varepsilon\big)$.
2. (a) La contraposée de $\mathscr{A}$: $f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b$ est :

$$a\neq b\Longrightarrow f(a)\neq f(b).$$

   (b) $\mathrm{non}(\mathscr{A})\equiv\big(f(a)=f(b)\text{ et }a\neq b\big)$.

   (c) Si f est l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^2\end{array}$, alors l'assertion $\mathscr{A}$ est fausse en général. En effet, il existe des réels a et b pour lesquels $\mathrm{non}(\mathscr{A})$ est vraie : on a par exemple $f(1)=f(-1)$ et $1\neq-1$. Plus précisément, pour tous réels a et b, on a :

$$f(a)=f(b)\Longleftrightarrow\big(a=b\text{ ou }a=-b\big).$$

Correction de l'exercice 4.

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$|z-\alpha|^2=\big|\big(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)\big)-\alpha\big|^2=\big|\big(\mathrm{Re}(z)-\alpha\big)+i\mathrm{Im}(z)\big|^2=(\mathrm{Re}(z)-\alpha)^2+(\mathrm{Im}(z))^2\geq(\mathrm{Im}(z))^2\,,$$

   donc $|z-\alpha|\geq\sqrt{(\mathrm{Im}(z))^2}=|\mathrm{Im}(z)|$. Ainsi :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ |z-\alpha|\geq|\mathrm{Im}(z)|.$$

2. Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$ et unitaire, il existe des réels α_1, α_2, ..., α_n tels que

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n) = \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k).$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \left|\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)\right| = \prod_{k=1}^{n}|z-\alpha_k|.$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, donc d'après la question précédente : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z-\alpha_k| \geq |\mathrm{Im}(z)|$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq \prod_{k=1}^{n}|\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|^n.$$

3. Soit $P = 1 + X^3$.

(a) Cherchons les racines complexes de P. Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$P(z) = 0 \iff z^3 = -1 \iff z^3 = e^{i\pi} \iff \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \arg(z^3) = \pi + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 3\theta = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \mathrm{e}^{i(\pi/3+k2\pi/3)}$$

$$\iff z = \mathrm{e}^{i\pi/3} \text{ ou } z = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \text{ ou } z = \mathrm{e}^{i5\pi/3} = \mathrm{e}^{-i\pi/3}.$$

Les racines complexes de P sont donc -1, $\mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$ et une décomposition de P en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = (X+1)\left(X - \mathrm{e}^{i\pi/3}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\pi/3}\right).$$

(b) Posons $z_0 = \mathrm{e}^{i\pi/3}$. On a alors $P(z_0) = 0$ car z_0 est une racine de P et $\mathrm{Im}(z_0) = \dfrac{\pi}{3} \neq 0$, donc

$$|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3.$$

4. Supposons que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine quelconque de P. On a alors $|\mathrm{Im}(z)|^n \leq |P(z)| = 0$, donc $|\mathrm{Im}(z)|^n = 0$ et donc $\mathrm{Im}(z) = 0$, ce qui signifie que z est un nombre réel. On en déduit donc que toutes les racines de P sont réelles.

Tout polynôme non constant étant scindé sur $\mathbb{C}$, le polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n),$$

avec $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, ..., $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes α_1, α_2, ..., α_n sont les racines de P. Or, on a démontré que toutes les racines de P sont réelles. On en déduit donc que : $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Le polynôme P est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

5. On a démontré dans la question 2 que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. Dans la question précédente, on a démontré que : si $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$, alors P est scindé sur $\mathbb{R}$. On a donc démontré le résultat suivant : « Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$. P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. »

Correction de l'exercice 5.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\arctan'(y) \cdot \tan'(\arctan(y)) = 1.$$

Or :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

On obtient donc en divisant par $\tan'(\arctan(y))$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

2. (a) Soit $x > 0$. Par produit de fonctions qui le sont, φ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Ainsi :

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad \varphi'(c_x) = \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{(x+1) - x}.$$

(b) Soit $t \in]x, x+1[$. Alors :

$$\varphi'(t) = \arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
x < t < 1+1 &\Rightarrow x^2 < t^2 < (1+x)^2 && \text{car } x > 0 \\
&\Rightarrow 1 + x^2 < 1 + t^2 < 1 + (1+x)^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{1+(1+x)^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+x^2} && \text{(tout est positif)} \\
&\Rightarrow \frac{x}{1+(1+x)^2} < \frac{t}{1+t^2} < \frac{x+1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow \frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan(x) < \frac{t}{1+t^2} + \arctan(t) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1)
\end{aligned}$$

où la dernière implication provient de la croissance de la fonction arc tangente.

(c) D'après les deux questions précédentes, on en déduit que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in]x, x+1[$:

$$\frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan(x) < \varphi(x+1) - \varphi(x) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1) \tag{1}$$

(d) On remarque que

$$\frac{x}{1+(1+x)^2} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que

$$\frac{x+1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc appliquer le théorème des gendarmes dans l'inégalité (1) et on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} ((x+1)\arctan(x+1) - x\arctan(x)) = \frac{\pi}{2}.$$