

Informations importantes

- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Le barème donné est susceptible d'être modifié.
- Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.
- La présentation, la qualité de la rédaction, et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.
- Chaque exercice doit être rédigé sur une nouvelle copie.

Exercice 1 (5,5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}. \end{cases}$$

On peut démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$. On admet ce résultat pour la suite.

1. On introduit la fonction $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Justifier rapidement que f est dérivable puis démontrer que : $\forall x \in [1, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1, 2]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f , montrer que :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}|.$$

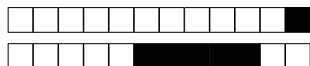
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une majoration de $|u_n - \sqrt{2}|$ en fonction de $|u_0 - \sqrt{2}|$ et de n (on ne demande pas de faire la démonstration par récurrence mais simplement de donner la majoration).
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2 (6 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère la fonction f définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln x} & \text{sinon.} \end{cases}$

1. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
2. Justifier rapidement que f est dérivable sur l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et calculer alors f' en tout point de cet ensemble.
3. Démontrer que f' est continue en 0.
4. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition. Compléter ce tableau en justifiant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .



NOM : L M P R S T V W X Z

PRÉNOM : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Numéro étudiant à coder dans la grille ci-contre : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exercice 3 - À rédiger sur une nouvelle copie (3,5 points)

Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie ci-dessous sur \mathbb{C} n'est pas polynomiale.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} [\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))]$$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas une fonction polynomiale.

Exercice 4 - QCM (5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Parmi les affirmations ci-dessous, la ou lesquelles sont vraies ?

- Une suite bornée est convergente.
- Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ , alors $(u_n)_n$ est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée.
- Une suite convergente est minorée.
- Si $u_n < v_n$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

2. Cocher parmi les propositions ci-dessous l'équivalent de $e^x - 1$ en 0 :

- $-x$ $-x^2$ x $-\frac{x^2}{2}$ $\frac{x^2}{2}$

3. Les polynômes de degré 2 à coefficients réels sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- Vrai Faux

4. « Définition : Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit ... dans $\mathbb{K}[X]$ si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$. »

Compléter les pointillés de la définition ci-dessus en choisissant le mot qui convient parmi les deux propositions suivantes.

- irréductible scindé

5. Parmi les affirmations ci-dessous, la ou lesquelles sont vraies ?

- $n^2 + \ln(n) \sim_{+\infty} n^2$ $e^{1+n} \sim_{+\infty} e^n$ $\frac{2n^2 + 1}{n + n^2} \sim_{+\infty} 1$