Exercice 1 (**Corrigé** - 8 points). Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme :

$$P_n(X) = X^n - (X-1)^n.$$

1. D'après la définition de $P_n(X)$ pour $n=2$ et $n=3$ on a :

$$\underline{P_2(X)} = X^2 - (X-1)^2 = X^2 - (X^2 - 2X + 1) = \boxed{2X-1},$$

et $P_3(X) = X^3 - (X-1)^3$. On peut développer $(X-1)^3$ en utilisant la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal :

$$(X-1)^3 = X^3 + 3X^2 \times (-1) + 3X \times (-1)^2 + (-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1.$$

Ainsi :

$$\underline{P_3(X)} = X^3 - \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) = \boxed{3X^2 - 3X + 1}.$$

2. (a) $P_n(X) = X^n - (X-1)^n$. Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k},$$

donc

$$\boxed{P_n(X) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k.}$$

(b) On en déduit que $\boxed{\deg(P_n(X)) = n-1}$ et que le <u>coefficient dominant</u> de $P_n(X)$ est $-\binom{n}{n-1}(-1)^{n-(n-1)} = -\dfrac{n!}{(n-1)! \times 1!}(-1)^1 = \boxed{-n}$.

3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $P_n(z) = 0 \iff z^n - (z-1)^n = 0 \iff z^n = (z-1)^n$. Remarquons que $P_n(0) = 0^n - (0-1)^n = -(-1)^n \neq 0$. Ainsi 0 n'est pas solution de l'équation $P_n(z) = 0$. On peut donc écrire :

$$P_n(z) = 0 \iff \frac{(z-1)^n}{z^n} = 1 \iff \left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 \iff \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n = 1.$$

Ainsi $P_n(z) = 0$ si et seulement si $1 - \frac{1}{z}$ est une racine n-ième de l'unité. Notons $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les n racines n-ièmes de l'unité définies par : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ 1 - \frac{1}{z} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{1}{z} = 1 - \omega_k. \end{aligned}$$

Or l'équation $\frac{1}{z} = 1 - \omega_k$ a des solutions si et seulement si $1 - \omega_k \neq 0$. De plus, la seule racine n-ième de l'unité égale à 1 est $\omega_0 = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ \frac{1}{z} = 1 - \omega_k \\ &\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{1}{1 - \omega_k}. \end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P_n(z) = 0$ sont donc les $n-1$ nombres complexes de la forme $\boxed{z_k = \dfrac{1}{1 - \omega_k}}$ avec $\boxed{k \in [\![1, n-1]\!]}$.

(b) Pour tout réel θ,

$$\begin{aligned} \underline{1 - \mathrm{e}^{i\theta}} &= \left(1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2i\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} = \boxed{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}} \text{ d'après les formules d'Euler.} \end{aligned}$$

(c) Les racines de $P_n(X)$ sont les solutions $z_1, \ldots, z_{n-1}$ de l'équation $P_n(z) = 0$ trouvées dans la question 3(a). Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$z_k = \frac{1}{1 - \omega_k} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}},$$

et d'après la question 3(b) avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ on a $1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = -2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}$. D'où

$$z_k = \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{i}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Puisque $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < k < n$, donc $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ et donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.

La forme exponentielle de z_k est donc : $\boxed{z_k = \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}}$.

4. (a) D'après 3(c), pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$z_k = \frac{i}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

(b) On remarque que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathrm{Re}(z_k) = \frac{1}{2}$. Dans le plan complexe (Oxy) les points correspondant aux racines de $P_n(X)$ sont donc tous situés sur la droite verticale d'équation $\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 2 (**Corrigé** - 7 points).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. (a) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. De même pour la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Donc les fonctions $u : x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $v : x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = e^x + e^{-x} = v(x) \text{ et } v'(x) = e^x - e^{-x} = u(x).$$

De plus, v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, et :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(v(x))^2 - (u(x))^2}{(v(x))^2} = 1 - \frac{(u(x))^2}{(v(x))^2}$$
$$\boxed{= 1 - (f(x))^2}.$$

(b) D'après la question précédente, pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{(v(x))^2 - (u(x))^2}{(v(x))^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. f satisfait donc les hypothèses du théorème de la bijection. f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $J = f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right[$.

On peut écrire,

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{e^x \left(1 - e^{-2x}\right)}{e^x \left(1 + e^{-2x}\right)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même,

$$\forall x < 0,\ f(x) = \frac{e^{-x} \left(e^{2x} - 1\right)}{e^{-x} \left(e^{2x} + 1\right)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

avec $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Ainsi $\boxed{J =]-1, 1[}$.

(c) Par définition, $f^{-1}(0) = x \iff f(x) = 0 \iff \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff 2x = 0 \iff x = 0$. D'où $\boxed{f^{-1}(0) = 0}$.

(d) D'après la question 1(a), f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' = 1 - f^2$ et on démontré dans 1(b) que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - \left(f(f^{-1}(x))\right)^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

2. On considère la fonction g définie sur $]-1, 1[$ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2f^{-1}(x)$.

(a) Notons pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Alors pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi'(x) = \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$ et $g(x) = (\ln \circ \varphi)(x) - 2f^{-1}(x)$. Donc pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}\underline{g'(x)} &= \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - 2\left(f^{-1}\right)'(x)\\ &= \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} - 2\frac{1}{1-x^2}\\ &= \frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{2}{1-x^2}\\ &= \boxed{0}.\end{aligned}$$

(b) Puisque $g' = 0$ sur $]-1, 1[$ on en déduit que g est constante sur $]-1, 1[$. Or $g(0) = \ln(1) - f^{-1}(0) = -f^{-1}(0) = 0$ d'après 1(c). Ainsi g est la fonction nulle sur $]-1, 1[$, autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Exercice 3 (**Corrigé** - 5 points).

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Puisque f est continue sur $[0, +\infty[$, que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$) et que $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = -\frac{1}{2}$, on déduit du théorème de prolongement dérivable que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Ainsi $\underline{f \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[}$. D'après l'énoncé, f' est continue sur $]0, +\infty[$ car de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Puisque $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = f'(0)$ alors f' est également continue en 0. Donc $\underline{f' \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$ et $\underline{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[}$.

2. Dans toute cette question, on admet que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

   (a) Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \iff \frac{x}{e^x - 1} = x \iff x = x(e^x - 1) \iff x(e^x - 2) = 0 \\ \iff x = 0 \text{ ou } e^x = 2 \\ \iff x = 0 \text{ ou } x = \ln(2). \end{aligned}$$

   Or $0 \notin]0,+\infty[$. Donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ qui est $\ln(2)$.

   (b) On remarque que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) > 0$. Puisque $u_0 = 0$, on peut en déduire par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est à valeurs dans $[0,+\infty[$. La fonction f étant dérivable sur $[0,+\infty[$ et vérifiant d'après l'énoncé : $\forall x \in [0,+\infty[,\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, on déduit de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a,b) \in [0,+\infty[^2,\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|.$$

   En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, $a = \ln(2)$ et $b = u_n$, on obtient :

$$|u_{n+1} - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|.$$

   Or, d'après la question précédente, $f(\ln(2)) = \ln(2)$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|.$$

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence en posant :

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $|u_n - \ln(2)| \leq \dfrac{\ln(2)}{2^n}$. Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - Initialisation : $u_0 = 0$ donc $|u_0 - \ln(2)| = \ln(2) = \frac{\ln(2)}{2^0}$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $|u_n - \ln(2)| \leq \dfrac{\ln(2)}{2^n}$. D'après 2(b), on a $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$. On en déduit donc que :

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{2^n} = \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}.$$

     Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - La propriété $\mathscr{P}(n)$ étant initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier n. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ln(2)| \leq \frac{\ln(2)}{2^n}.$$

   (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{2^n} = 0$. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - \ln(2)| \leq \frac{\ln(2)}{2^n},$$

   on peut déduire du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ln(2)| = 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2)$.