Final MTA2 - Automne 2019
Durée : 1h30

Informations importantes

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Le barème donné est susceptible d'être modifié.**
- **Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- **La présentation, la qualité de la rédaction et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.**
- **Vous devez rendre trois copies (une copie par exercice).**

Exercice 1 .... (8 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme :

$$P_n(X) = X^n - (X-1)^n.$$

1. Écrire sous forme développée $P_2(X)$ et $P_3(X)$.
2. (a) Donner la forme développée du polynôme $P_n(X)$ en appliquant la formule du binôme.
   (b) En déduire le degré et le coefficient dominant de $P_n(X)$.
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_n(z) = 0$ d'inconnue z. On exprimera les solutions en fonction des racines n-ièmes de l'unité.
   (b) Vérifier que, pour tout réel θ, $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (c) Déterminer les écritures exponentielles des racines complexes du polynôme $P_n(X)$.
4. (a) À l'aide de la question précédente, écrire sous forme algébrique les racines de $P_n(X)$.
   (b) Sur quelle droite du plan complexe les points correspondant aux racines de $P_n(X)$ sont-ils tous situés ?

Exercice 2 - À rédiger sur une nouvelle copie .... (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. (a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - (f(x))^2.$$

   (b) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
   (c) Calculer $f^{-1}(0)$.
   (d) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.
2. On considère la fonction g définie sur $]-1,1[$ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2f^{-1}(x)$.
   (a) Sans justifier la dérivabilité de g, démontrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ g'(x) = 0$.
   (b) En déduire une expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Exercice 3 - À rédiger sur une nouvelle copie .... (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Dans cet exercice, on admet que f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

1. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-\dfrac{1}{2}$. En déduire que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
2. Dans toute cette question, on admet que : $\forall x\in[0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$.
   (a) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation $f(x)=x$ d'inconnue x.
   (b) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence en posant :

   $$\begin{cases}u_0=0\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n).\end{cases}$$

   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\ln(2)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\ln(2)|.$$

   (c) Démontrer alors par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\ln(2)|\leq\dfrac{\ln(2)}{2^n}$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.