Correction

Correction de l'exercice 1.

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}(2a+3b)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(2a)^k(3b)^{3-k} = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(2a)^{3-k}(3b)^k \\ &= \binom{3}{0}(2a)^3(3b)^0 + \binom{3}{1}(2a)^2(3b)^1 + \binom{3}{2}(2a)^1(3a)^2 + \binom{3}{3}(2a)^0(3b)^3.\end{aligned}$$

   On lit les coefficients binomiaux sur la ligne correspondant à $n=3$ du triangle de Pascal. On obtient :

$$\begin{aligned}(2a+3b)^3 &= 1(2a)^3(3b)^0 + 3(2a)^2(3b)^1 + 3(2a)^1(3a)^2 + (2a)^0(3b)^3 \\ &= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.\end{aligned}$$

2. Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
   — Supposons que n est pair. Alors : $f(n) = n+1$ et $n+1$ est impair, donc $f(n+1) = (n+1)-1 = n$. Ainsi, $(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n+1) = n$.
   — Supposons maintenant que n est impair. Alors : $f(n) = n-1$ et $n-1$ est pair, donc $f(n-1) = (n-1)+1 = n$. Ainsi, $(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n-1) = n$.

   On a donc, que n soit pair ou impair, $(f \circ f)(n) = n$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f \circ f)(n) = n.$$

   On en déduit que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Or d'après le cours, si il existe une application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$. Puisque $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, on en déduit donc que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

3. (a) En utilisant successivement la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k \times 1^{n-k} = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}+1\right)^n.$$

   Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} + 1 &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \text{d'après les formules de Moivre} \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \times 2\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}.\end{aligned}$$

   Ainsi, en utilisant à nouveau la formule de Moivre on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}} = \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \sqrt{3}^n\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{6}}.$$

   (b) En identifiant les parties réelles de l'inégalité obtenue on a :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{3}^n\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{6}}\right),$$

   i.e.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right).$$

Correction de l'exercice 2.

1. La fonction f_n est dérivable par somme, produit et composition de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)+\mathrm{e}^{-x}\left(0+\sum_{k=1}^{n}\frac{kx^{k-1}}{k!}\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in [0,1]$, alors :

$$\left|f_n'(x)\right| = \left|\mathrm{e}^{-x}\right|\cdot|x^n|\cdot\left|\frac{1}{n!}\right| \leqslant 1\cdot 1\cdot\frac{1}{n!}.$$

   En effet :

$$0\leqslant x\leqslant 1 \implies \begin{cases} 0\leqslant x^n\leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{e}^{-x}\leqslant \mathrm{e}^0, \text{ par croissance de la focntion exponentielle.}\end{cases}$$

3. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis et le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$|f_n(1)-f_n(0)| \leqslant \frac{1}{n!}|1-0|.$$

4. (a) On remarque que, par définition de u_n :

$$\begin{aligned} 0\leqslant |f_n(1)-f_n(0)| \leqslant \frac{1}{n!} &\iff 0\leqslant \left|\frac{u_n}{\mathrm{e}}-1\right|\leqslant\frac{1}{n!} \\ &\iff 0\leqslant |u_n-\mathrm{e}|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n!} \end{aligned}$$

   Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$|u_n-\mathrm{e}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}$.

   (b) On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f_n(1)=\mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

   D'où :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}f_n(1) = u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}.$$

Correction de l'exercice 3. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes est définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1\ , \quad T_1 = X \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1} = 2\,X\,T_n - T_{n-1} \quad (\star) \end{cases}$$

1. (a) $T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X$;
   $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$;
   $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$;
   $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

   (b) On rappelle que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. T_0, T_3 et T_4 ne sont ni de degré 1, ni de degré 2.
   De plus $T_2 = \left(\sqrt{2}\,X - 1\right)\left(\sqrt{2}\,X + 1\right)$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Donc $T_1 = X$ est le seul polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ parmi les 5 précédents.

2. On admet que chaque polynôme T_n est un polynôme de degré n.

   (a) Soit n un entier naturel non nul fixé.
   D'après la relation $(\star)$, $\quad T_{n+1} = 2\,X\,T_n - T_{n-1}$.
   Or $\deg(T_{n-1}) = n-1$, $\deg(2X\,T_n) = \deg(2X) + \deg(T_n) = 1 + n$ et $\deg(T_{n-1}) < \deg(2X\,T_n)$.
   Donc les polynômes T_{n+1} et $2\,X\,T_n$ ont le même monôme dominant, à savoir :
   $$a_{n+1}\,X^{n+1} = 2X\,a_n\,X^n = 2a_n\,X^{n+1}.$$
   On obtient ainsi
   $$a_{n+1} = 2\,a_n.$$

   (b) Nous avons d'après la question précédente : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = 2\,a_n$.
   Cette égalité est fausse pour $n = 0$ car $a_0 = a_1 = 1$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 1$. Mais la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique. Par conséquent :
   $$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2^{n-1} \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

3. On se fixe un réel a.
   — Pour tout entier naturel n non nul, notons $\mathscr{P}(n)$ les deux égalités :
   « $T_{n-1}(\cos a) = \cos\big((n-1)a\big)$ et $T_n(\cos a) = \cos\big(n\,a\big)$ ».
   — Vérifions $\mathscr{P}(1)$: $\quad T_0(\cos a) = 1 = \cos(0\,a)$ et $T_1(\cos a) = \cos a = \cos(1\,a)$.
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, ce qui revient à prouver seulement que $T_{n+1}(\cos a) = \cos\big((n+1)a\big)$.

   D'après la relation $(\star)$, $T_{n+1} = 2\,X\,T_n - T_{n-1}$. En évaluant en $X = \cos a$, on obtient :
   $$T_{n+1}(\cos a) = 2\,\cos(a)\,T_n(\cos a) - T_{n-1}(\cos a).$$
   Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $T_{n-1}(\cos a) = \cos\big((n-1)a\big)$ et $T_n(\cos a) = \cos(na)$. Donc
   $$T_{n+1}(\cos a) = 2\,\cos(a)\,\cos\big(na\big) - \cos\big((n-1)a\big).$$
   En remplaçant b par na dans l'égalité rappelée : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on obtient
   $$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos a) &= 2\,\cos(a)\,\cos\big(na\big) - \cos\big((n-1)a\big) \\ &= [\cos(a+na) + \cos(a-na)] - \cos\big((n-1)a\big) \\ &= \cos\big((n+1)a\big) + \cos\big((1-n)a\big) - \cos\big((n-1)a\big) \\ &= \cos\big((n+1)a\big) + \cos\big((n-1)a\big) - \cos\big((n-1)a\big) \\ &= \cos\big((n+1)a\big). \end{aligned}$$

— En conclusion, selon le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. En particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos a) = \cos(n\, a).$$

4. — En prenant $a = 0$: $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = \cos 0 = 1$.
   — En prenant $a = \pi$: $T_n(-1) = T_n(\cos \pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

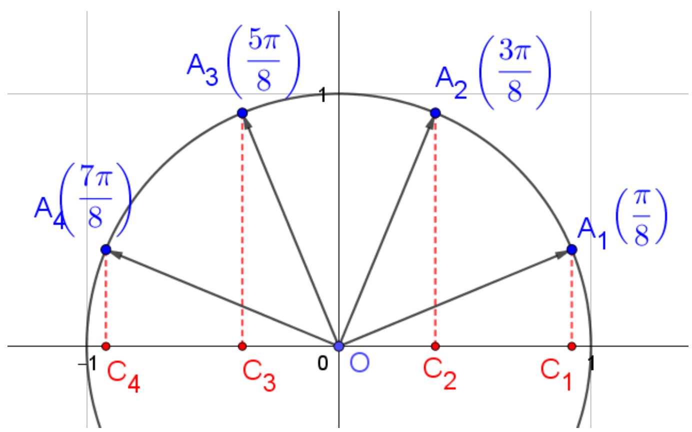
5. (a) On résout dans l'intervalle $[0\,,\,\pi]$, l'équation d'inconnue a : $\cos(4\,a) = 0$.

$$\begin{aligned}
\cos(4a) = 0 &\iff \cos(4a) = \cos\frac{\pi}{2}\\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 4a = \frac{\pi}{2} + k\pi\\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ a = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\\
&\iff \exists\, k \in [\![0\,,\,3]\!]\ ;\ a = \frac{(1+2k)\pi}{8}\\
&\iff a = \frac{\pi}{8} \text{ ou } a = \frac{3\pi}{8} \text{ ou } a = \frac{5\pi}{8} \text{ ou } a = \frac{7\pi}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Soit a l'une des quatre solutions de l'équation précédente.

Alors $T_4\,(\cos a) = \cos\,(4\,a) = 0$. Donc les nombres réels $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$ sont des racines du polynôme T_4.

D'autre part, comme la fonction cos est **strictement** décroissante sur l'intervalle $[0\,,\,\pi]$ et que $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{5\pi}{8} < \frac{7\pi}{8} < \pi$, les réels $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$ sont deux à deux distincts.



Ainsi le polynôme T_4 admet **au moins** 4 racines réelles distinctes :

$$\cos\frac{\pi}{8}\,,\ \cos\frac{3\pi}{8}\,,\ \cos\frac{5\pi}{8}\,,\ \cos\frac{7\pi}{8}.$$

(c) T_4 est de degré 4, donc T_4 admet **au plus** 4 racines réelles. Ainsi T_4 admet exactement 4 racines réelles de multiplicité 1 : $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$, et donc :

$$T_4 = a_4 \prod_{k=0}^{3}\left(X - \cos\frac{2k+1}{8}\pi\right).$$

Finalement

$$T_4 = 8\left(X - \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(X - \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(X - \cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(X - \cos\frac{7\pi}{8}\right).$$

+1/1/60+

NOM Prénom	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Cette feuille doit impérativement être rendue avec vos copies même si vous ne traitez pas cet exercice. Il vous est demandé d'y inscrire lisiblement vos nom et prénom et de **noircir complètement** *les cases correspondant à votre numéro d'étudiant.*

Exercice 4 - QCM ....(5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**, il ne suffit pas de les cocher. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

Question 1 S'il fait beau, alors je mets mon chapeau. Il ne fait pas beau. Que peut-on en déduire ?

☐ Je ne mets pas mon chapeau. ■ Rien. ☐ Je mets mon chapeau.

Question 2 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Compléter la définition suivante en choisissant la bonne réponse parmi les propositions ci-dessous. *Définition : on dit que f est bijective si :*

☐ $\forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x).$

■ $\forall y \in F,\ \exists! x \in E, \quad y = f(x).$

☐ $\exists! y \in F, \forall x \in E, \quad y = f(x).$

☐ $\exists y \in F,\ \exists! x \in E, \quad y = f(x).$

Question 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Choisir parmi les ensembles ci-dessous celui ou ceux qui sont égaux à l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

■ $\left\{e^{i2k\pi/n},\ k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\}.$

☐ $\left\{e^{ik\pi/n},\ k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\}.$

■ $\left\{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\right\}.$

■ $\left\{e^{i2k\pi/n},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Question 4 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

■ Faux. ☐ Vrai.

Question 5 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :

■ $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \geq B,\ f(x) \geq A.$

☐ $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \geq A,\ f(x) \geq B.$

☐ $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq M.$

☐ $\exists B \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R},\ \forall x \geq B,\ f(x) \geq A.$