Exercice 1 (7 points)

A. Ensembles. Soit E un ensemble quelconque.

1. Soit A une partie de E.

$$A \triangledown \varnothing = \overline{A \cup \varnothing} = \boxed{\overline{A}}, \qquad A \triangledown A = \overline{A \cup A} = \boxed{\overline{A}}, \qquad A \triangledown \overline{A} = \overline{A \cup \overline{A}} = \overline{E} = \boxed{\varnothing}.$$

2. Soient A et B deux parties de E.

$$\boxed{(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B)} = \overline{A} \triangledown \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = \boxed{A \cap B}.$$

3. Dans cette question, on suppose que :

$$E = \mathbb{R}, \quad A = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ |x+3| \leqslant 2\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \lfloor x \rfloor = -6\}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $x \in A \iff -2 \leqslant x+3 \leqslant 2 \iff -5 \leqslant x \leqslant -1$. Donc $A = [-5;-1]$.
- $x \in B \iff -6 \leqslant x < -6+1 \iff x \in [-6;-5[$. Donc $B = [-6;-5[$.
- Ainsi : $A \cup B = [-5;-1] \cup [-6;-5[= [-6;-1]$.
- On en déduit :

$$\boxed{A \triangledown B = \overline{[-6;-1]} =]-\infty;-6[\cup]-1;+\infty[}.$$

B. Calcul d'une somme. Soient n un entier non nul et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

D'où

$$k\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2. On en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

En utilisant le changement de variable $p = k-1$, on a :

$$\begin{cases} p = k-1 \\ 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} k-1 = p \\ 0 \leqslant p \leqslant n-1. \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{S_n} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}1^p 1^{(n-1)-p} = n(1+1)^{n-1} = \boxed{n2^{n-1}},$$

d'après la formule du binôme de Newton.

C. Continuité et dérivabilité. On admet que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et on considère la fonction f définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

1. (a) Pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\cos(x)-1}{x} - 0}{x} = \frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$

D'après la limite donnée dans l'énoncé, on en déduit : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$.

Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite finie en 0 qui vaut $-\frac{1}{2}$.

Par conséquent, f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

(b) La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x$ l'est aussi. Donc, sur $\mathbb{R}^*$, f est un quotient de deux fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout réel x non nul, on a :

$$\boxed{f'(x)} = \frac{(-\sin(x)) \times x - (\cos(x)-1) \times 1}{x^2} = \boxed{-\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\cos(x)-1}{x^2}}.$$

2. Par définition, f' est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$. D'après les équivalents usuels en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Donc $\boxed{f' \text{ est continue en } 0}$.

3. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $-\sin$. De plus, pour tout réel x :

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\cos'(x)\right| \leqslant 1.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leqslant |x - y|.$$

En particulier, pour $y = 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x) - 1| \leqslant |x|.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |f(x)| \leqslant 1.$$

Cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$ car $f(0) = 0$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant 1}.$$

Exercice 2 : fonctions et suite (7 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,,\,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = (x+1)\mathrm{e}^{n\,x}$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} n\,x = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$. D'où, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{n\,x} = +\infty$ puis $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$

2. Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{n\,x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0\,,\,+\infty[$.
Donc f_n est dérivable sur $[0\,,\,+\infty[$
et $\forall\, x \in [0\,,\,+\infty[,\ f_n'(x) = \mathrm{e}^{n\,x} + (x+1)\,n\,\mathrm{e}^{n\,x} = (n\,x+n+1)\,\mathrm{e}^{n\,x}$

Or, pour tout réel positif x, $(n\,x+n+1) \geqslant n+1 > 0$ et $\mathrm{e}^{n\,x} > 0$.
Donc $\forall\, x \in [0\,,\,+\infty[,\ f_n'(x) > 0$.
Ainsi la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,,\,+\infty[$.

$$f_n(0) = (0+1)\mathrm{e}^0 = 1$$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	1 $\nearrow$ $+\infty$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction f_n est **continue** (car dérivable) et **strictement** croissante sur l'**intervalle** $[0\,,\,+\infty[$. Alors, d'après le **théorème de la bijection**, f_n est bijective de $[0\,,\,+\infty[$ vers l'intervalle image :

$$f_n\big([0\,,\,+\infty[\big) = \left[f_n(0)\,,\,\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [1\,,\,+\infty[$$

Or l'intervalle image $f_n\big([0\,,\,+\infty[\big)$ contient le nombre n.
Donc n admet un unique antécédent u_n par f_n dans l'intervalle $[0\,,\,+\infty[$.
Autrement dit, l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = n$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}^+$.

(b) $f_1 : x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^x$ et $f_1(0) = 1$. Donc 0 est solution dans $\mathbb{R}^+$ de l'équation $f_1(x) = 1$. Comme cette solution est unique, nous avons $\boxed{u_1 = 0}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \left(\frac{\ln n}{n}+1\right)\mathrm{e}^{n\frac{\ln n}{n}} = \left(\frac{\ln n}{n}+1\right)\underbrace{\mathrm{e}^{\ln(n)}}_{n} = \left(\frac{\ln n}{n}+1\right)n$$

D'où $\boxed{f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \ln(n)+n}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Nous savons déjà, par la question 3.(a), que $u_n \in \mathbb{R}^+$. D'où $u_n \geqslant 0$.
De plus

$$n \geqslant 1 \implies \ln(n) \geqslant 0 \implies \ln(n)+n \geqslant n \underset{\text{question 4.(a)}}{\implies} f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) \geqslant f_n(u_n) \geqslant 1$$

Or la bijection réciproque f_n^{-1} de la fonction f_n est strictement monotone sur $[1\,,\,+\infty[$ et de même sens de variation que f_n.
Donc f_n^{-1} est croissante sur $[1\,,\,+\infty[$. Ainsi

$$f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) \geqslant f_n(u_n) \geqslant 1 \implies f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \geqslant f_n^{-1}\left(f_n(u_n)\right) \geqslant f_n^{-1}(1)$$

Finalement $\boxed{\frac{\ln n}{n} \geqslant u_n \geqslant 0}$

(c) On vient de prouver que pour tout entier naturel non nul n, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
$f_n(u_n) = n$ d'où $(u_n+1)\mathrm{e}^{n\,u_n} = n$ d'où $\ln\left((u_n+1)\mathrm{e}^{n\,u_n}\right) = \ln(n)$

d'où $\ln(u_n+1) + \ln\left(\mathrm{e}^{n\,u_n}\right) = \ln(n)$ d'où $\ln(1+u_n) + n\,u_n = \ln(n)$

d'où $n\,u_n = \ln(n) - \ln(1+u_n)$

Comme $n \neq 0$, on en déduit que $\boxed{u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln(1+u_n)}{n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+u_n) = \ln(1) = 0$
Donc on conjecture que $\dfrac{\ln(1+u_n)}{n}$ est négligeable devant $\dfrac{\ln(n)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{u_n}{\ln(n)/n} = 1 - \frac{\ln(1+u_n)/n}{\ln(n)/n} = 1 - \frac{\ln(1+u_n)}{\ln(n)} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit que $\boxed{u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}}$

Exercice 3 : polynômes et nombres complexes (7 points)

1. On a :

$$\begin{aligned} z^3 = -1 &\iff z^3 = \mathrm{e}^{i\pi} \\ &\iff z^3 = \left(\mathrm{e}^{i\pi/3}\right)^3 \\ &\iff \left(\frac{z}{\mathrm{e}^{i\pi/3}}\right)^3 = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0;2]\!],\ \frac{z}{\mathrm{e}^{i\pi/3}} = \mathrm{e}^{i2k\pi/3} \\ &\iff \exists k \in [\![0;2]\!],\ z = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

On en déduit que les racines cubiques de -1 sont -1, $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. (a) On a :

$$\omega + \bar{\omega} = 2\mathcal{R}\mathrm{e}(\omega) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

(b) Le discriminant de l'équation de l'énoncé est $\Delta = -3$, les racines sont donc :

$$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

3. (a) On sait que :

$$X^2 - X + 1 = (X-\omega)(X-\bar{\omega}).$$

Ainsi, P est divisible par $X^2 - X + 1$ si, et seulement si, $P(\omega) = P(\bar{\omega}) = 0$. Or :

$$P(\omega) = 0 \iff \overline{P(\omega)} = 0 \iff P(\bar{\omega}) = 0.$$

D'où le résultat demandé.

(b) Il suffit de résoudre $P(\omega) = 0$. Or :

$$P(\omega) = \omega^{2n} - (\omega - 1)^n + \omega^n + 1 = \omega^{2n} - \left(\omega^2\right)^n + \omega^n + 1 = \omega^n + 1.$$

De plus :

$$\omega^n = \left(\mathrm{e}^{i\pi/3}\right)^n = \mathrm{e}^{in\pi/3}.$$

Ainsi :

$$P(\omega) = 0 \iff \mathrm{e}^{in\pi/3} = \mathrm{e}^{i\pi} \iff n\pi/3 \equiv \pi\ [2\pi].$$

Finalement, P est divisible par $X^2 - X + 1$ ssi il existe k entier tel que $n = 3 + 6k$.

4. (a) De manière immédiate :

$$\omega - \bar{\omega} = i\sqrt{3}$$

De plus, à l'aide des formules d'Euler et de Moivre :

$$\omega^n - \bar{\omega}^n = \mathrm{e}^{in\pi/3} - \mathrm{e}^{-in\pi/3} = 2i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

(b) D'après le théorème de division euclidienne,

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{R}[X], \quad \begin{cases} P(X) = (X^2 - X + 1)Q(X) + R(X), \\ \mathrm{d}(R) < 2. \end{cases}$$

Ainsi, le reste est de la forme $R(X) = aX + b$ où a et b sont deux réels à déterminer. En évaluant P en ω et en $\bar{\omega}$ on obtient le système :

$$(S)\ :\ \begin{cases} a\omega + b = \omega^{2n} - (\omega - 1)^n + \omega^n + 1 \\ a\bar{\omega} + b = \bar{\omega}^{2n} - (\bar{\omega} - 1)^n + 1 \end{cases}$$

Or, ω et $\bar{\omega}$ étant solutions de (E_2), on sait que $\omega - 1 = \omega^2$ et que $\bar{\omega} - 1 = \bar{\omega}^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} a\omega + b = \omega^{2n} - \omega^{2n} + \omega^n + 1 \\ a\bar{\omega} + b = \bar{\omega}^{2n} - \bar{\omega}^{2n} + \bar{\omega}^n + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a\omega + b = \omega^n + 1 \\ a\bar{\omega} + b = \bar{\omega}^n + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a\omega + b = \omega^n + 1 \\ a(\omega - \bar{\omega}) = \omega^n - \bar{\omega}^n \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{aligned}$$

On en déduit successivement que

$$a = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

puis que

$$b = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 1 - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}$$

Une autre possibilité pour arriver au résultat consiste à réécrire la première équation du système (S) et à identifier les parties réelles et imaginaires de part et d'autre.