Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Remarquons que la formule est vraie pour $n = 0$ puisque :

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{(par hypothèse)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1} b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1} b^{n+1-k} + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Effectuons un changement d'indice dans la première somme en posant $p = k+1$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^p b^{n+1-p} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1} b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

puisque les coefficients binomiaux correspondant à $k = 0$ et à $k = n+1$ sont égaux à 1. D'où le résultat par récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3 \right) &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 \\
&= (n+1)^3 - 0^3
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\end{aligned}$$

Ainsi, en isolant la somme et après simplification :

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Correction de l'exercice 2.

1. Comme $I=]0,\frac{\pi}{2}[$, il est immédiat que :

$$\forall x\in I,\quad \cos(x)\neq 0.$$

L'équation est donc bien définie sur I.

2. (a) Soit $x\in I$, alors :

$$\frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}=\frac{\cos(x)+i\sin(x)}{\cos(x)}=1+i\tan(x)\neq 1.$$

(b) On remarque que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k(x)}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}\right)^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

où $q=\frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}\neq 1$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} &= \frac{1-\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{1-\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}}\\ &= \frac{\dfrac{\cos^{n+1}(x)-\mathrm{e}^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{\dfrac{\cos(x)-\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}}\\ &= \frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{-i\sin(x)\cos^n(x)}\\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\times\cos^n(x)}+i\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\sin(x)\times\cos^n(x)}\end{aligned}$$

(c) D'après le calcul précédent, en identifiant les parties réelles, on obtient exactement le résultat demandé.

3. $x \in I$ est solution de (E) si et seulement si :
$$\sin((n+1)x) = 0.$$
Or :
$$\sin((n+1)x = 0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, (n+1)x = k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k\pi}{n+1}.$$
Dans plus, comme on résout (E) sur I, on a aussi :
$$0 < \frac{k\pi}{n+1} < \frac{\pi}{2} \iff 0 < k < \frac{n+1}{2}.$$
Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est donné par :
$$S = \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \cap]0, (n+1)/2[\right\}.$$

Correction de l'exercice 3.

1. (a) Pour montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, il faut montrer que l'une est croissante, que l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0. Soit alors $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k a_k.$$
Or :
$$\sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k a_k = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0$$
car la suite (a_n) est décroissante. On montre de la même manière que :
$$v_{n+1} - v_n = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0.$$
Enfin,
$$v_n - u_n = -a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
car la suite $(a_n)_n$ tend vers 0 en $+\infty$ et que $(a_{2n+1})_n$ est une suite extraite de $(a_n)_n$.

(b) Comme (u_n) et $(v_n)_n$ sont adjacentes, elles admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Ainsi, la sous-suite des termes paires de $(S_n)_n$ et la sous-suite des termes impairs de $(S_n)_n$ ayant la même limite ℓ, on peut en conclure que $(S_n)_n$ converge vers ℓ.

2. (a) Notons pour tout n entier naturel :
$$P(n) : -1 \leqslant b_n < 0.$$
Comme $b_0 = -1/2$, $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. D'une part :
$$-1 \leqslant b_n < 0 \implies \lfloor b_n \rfloor = -1$$
Ainsi :
$$b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1 = \sin(b_n)$$
D'autre part, d'après l'énoncé :
$$-1 \leqslant b_n < 0 \implies b_n < \sin(b_n) < 0,$$
où l'inégalité de droite découle des propriétés de la fonction sinus sur $[-1, 0[$. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie et donc le résultat demandé est vrai par récurrence.

(b) D'après la question précédente, comme $b_n \in [-1, 0[$, sa partie entière vaut -1 et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n).$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, d'après l'indication donnée dans l'énoncé :

$$b_{n+1} - b_n = \sin(b_n) - b_n > 0.$$

La suite $(b_n)_n$ est donc (strictement) croissante.

(d) D'après le théorème de convergence monotone, $(b_n)_n$ étant croissante et majorée (par 0), elle converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction sinus et d'après la relation trouvée à la question 2.(b), on a :

$$\sin(\ell) = \ell.$$

Or, d'après l'indication de l'énoncé, cette équation n'a pas de solution sur $[-1, 0[$. De plus, d'après la question 2.(a), on sait que la limite de $(b_n)_n$ est un élément de $[-1, 0]$. Finalement, $\ell = 0$.

(e) Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -b_n.$$

Alors, $(a_n)_n$ est une suite décroissante de nombre positif et qui tend vers 0 en $+\infty$. D'après la première partie de l'exercice, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

converge. Or :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k,$$

d'où le résultat.