Exercice 1

Partie A

1. On peut associer, à chaque application $f \in F^E$, la liste ordonnée de 4 éléments $\big(f(1)\,,\,f(2)\,,\,f(3)\,,\,f(4)\big)$, ces quatre éléments étant pris dans F avec répétitions autorisées. Grâce un arbre de choix à 4 niveaux, on «voit» que le nombre d'applications de E dans F est égal à : $\boxed{5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625}$

2. (a) Posons $\varphi(1) = b \quad ; \quad \varphi(2) = a \quad ; \quad \varphi(3) = e \quad ; \quad \varphi(4) = c$
   Alors φ est un exemple d'application injective de E dans F.

   (b) Pour construire une injection f de $E = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\}$ dans
   $F = \{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\}$, on commence par choisir $f(1)$ (5 possibilités), puis on choisit $f(2)$ (4 possibilités), ensuite $f(3)$ (3 possibilités), et enfin $f(4)$ (2 possibilités). On peut coder chaque injection de E dans F par une unique liste ordonnée et sans répétition de 4 éléments choisis dans l'ensemble F.
   Le nombre d'injections est donc $\boxed{A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120}$.

Partie B

1. Soit E et F deux ensembles. Soit f une application de E vers F.

   Pour toute partie A de E, on appelle **image directe** de A par f le sous-ensemble de F noté $f(A)$, défini par :

$$f(A) = \{f(x) \in F \;/\; x \in A\}$$

   Autrement dit $\quad y \in f(A) \iff [\,\exists\, x \in A \;/\; y = f(x)\,]$

2. Déterminons $f(\mathbb{U})$.

$$\begin{aligned} z' \in f(\mathbb{U}) \quad &\iff \quad \exists\, z \in \mathbb{U} \;/\; z' = f(z) \\ &\iff \quad \exists\, \theta \in \mathbb{R} \;/\; z' = f(\mathrm{e}^{i\,\theta}) \\ &\iff \quad \exists\, \theta \in \mathbb{R} \;/\; z' = \mathrm{e}^{i\,\theta} + \mathrm{e}^{-i\,\theta} \\ &\iff \quad \exists\, \theta \in \mathbb{R} \;/\; z' = 2\,\cos\theta \qquad \text{d'après une formule d'Euler} \\ &\iff \quad z' \in \mathbb{R} \text{ et } -2 \leqslant z' \leqslant 2 \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{f(\mathbb{U}) \text{ est l'intervalle fermé borné } [-2\,;\,2]}$

Exercice 1 (bis)

Partie A

1. On peut associer, à chaque application $f \in F^E$, la liste ordonnée de 5 éléments $\big(f(1)\,,\,f(2)\,,\,f(3)\,,\,f(4)\,,\,f(5)\big)$, ces cinq éléments étant pris dans F avec répétitions autorisées. Grâce un arbre de choix à 5 niveaux, on «voit» que le nombre d'applications de E dans F est égal à : $\boxed{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 2^{10} = 1024}$

2. (a) Posons $\varphi(1) = b \quad ; \quad \varphi(2) = a \quad ; \quad \varphi(3) = d \quad ; \quad \varphi(4) = c \quad ; \quad \varphi(5) = b$
   Alors φ est un exemple d'application surjective de E sur F.

   (b) Pour construire une surjection f de $E = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\}$ sur
   $F = \{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\}$, on commence par choisir les deux éléments de E qui auront la même image, soit $\dbinom{5}{2}$ possibilités, puis l'image commune de ces deux éléments (4 possibilités). Ensuite on forme une bijection entre les 3 éléments restant au départ et à l'arrivée (3! possibilités).

   Le nombre de surjections est donc $\boxed{\dbinom{5}{2} \times 4 \times 3! = \dfrac{5 \times 4}{2} \times 4 \times 6 = 240}$.

Partie B

1. Soit E et F deux ensembles. Soit f une application de E vers F.

   Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$, défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \;/\; f(x) \in B\}$$

   Autrement dit $\quad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$

2. Déterminons $f^{-1}(\mathbb{U})$.

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \quad &\iff \quad f(z) \in \mathbb{U} \\ &\iff \quad |\,f(z)\,| = 1 \\ &\iff \quad \frac{|z+1|}{|z|} = 1 \qquad \text{d'après une propriété du module d'un quotient} \\ &\iff \quad |z+1| = |z| \\ &\iff \quad |z+1|^2 = |z|^2 \\ &\iff \quad (z+1)\,\big(\overline{z+1}\big) = z\,\overline{z} \\ &\iff \quad z + \overline{z} = -1 \qquad \text{car} \quad \overline{z+1} = \overline{z} + 1 \\ &\iff \quad \Re\mathrm{e}(z) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U})$ est l'ensemble des complexes dont la partie réelle est égale à $-1/2$. Dans le plan complexe, $f^{-1}(\mathbb{U})$ est représenté par la droite verticale d'équation $x = -1/2$.

Exercice 2

1. (a) $Z^4 = 1 \iff (Z^2-1)(Z^2+1) = 0 \iff (Z-1)(Z+1)(Z-i)(Z+i) = 0$ admet comme ensemble solutions

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{i\,2k\pi}{4}}, k \in [\![0;3]\!] \right\} = \{1\ ,\ i\ ,\ -i\ ,\ -1\}}$$

(b) On pose $Z = \dfrac{2z+2}{z-1}$ avec $z \neq 1$ et on utilise les solutions précédentes :

$Z = 1 \Leftrightarrow 2z+1 = z-1 \Leftrightarrow z = -2$

$Z = -1 \Leftrightarrow 2z+1 = -z+1 \Leftrightarrow z = 0$

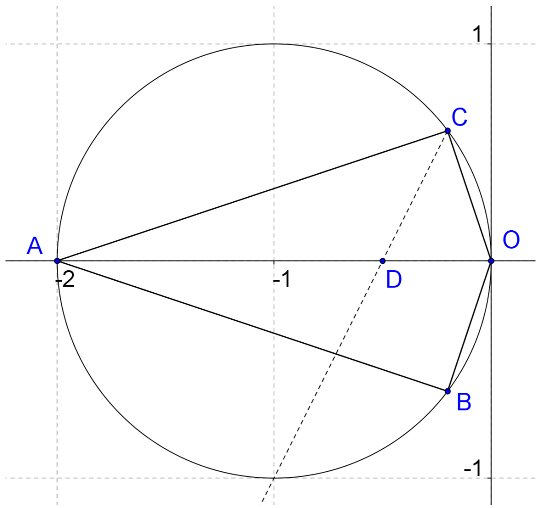
$Z = i \Leftrightarrow 2z+1 = iz - i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-i}{2-i} \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

$Z = -i \Leftrightarrow 2z+1 = -iz + i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2+i} \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

L'équation admet comme ensemble de solutions :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ 0\ ,\ -2\ ,\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\ ,\ -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right\}}$$

2. a)



b) Calculons une mesure de l'angle orienté de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}}\right)$ en utilisant les affixes :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}}\right) = \arg\left(\frac{0-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}}{-2 - \left(-\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}\right)}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}}{-\frac{9}{5} - \frac{3}{5}i}\right) = \arg\left(\frac{1}{3}i\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CO}$ sont orthogonaux. On en déduit que le point C appartient au cercle de diamètre $[AO]$.

D'autre part les points B et C sont symétriques par rapport à l'axes des abscisses car $\overline{c} = b$.

D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

donc le point B appartient aussi au cercle de diamètre $[AO]$, ce qui prouve bien que les quatre points A, O, B et C sont situés sur le cercle de diamètre $[AO]$.

3. Nous avons : $z' = \dfrac{a-c}{d-c} = \dfrac{-2 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)}{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)} = \dfrac{-\frac{9}{5} - \frac{3}{5}i}{-\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i} = 2 - 2i$

Or $|2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ et

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

On en déduit donc que $z' = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$

En utilisant les modules :

$$\frac{CA}{CD} = \frac{|a-c|}{|d-c|} = \left|\frac{a-c}{d-c}\right| = |z'| = 2\sqrt{2}$$

On a aussi :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}\right) = \arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

on peut en déduire que la droite (CD) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}\right)$.

Exercice 3

Partie A

1. (a) On considère l'inégalité $\mathcal{P}(n)$: «$u_n \leqslant u_{n+1}$».
Cette propriété est vraie au rang 0 par hypothèse.
Soit k un entier naturel fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie : $u_k \leqslant u_{k+1}$.
Alors, $f(u_k) \leqslant f(u_{k+1})$ car f est croissante sur I et u_k, u_{k+1} sont éléments de I (par hypothèse, $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
On en déduit que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$, c'est-à -dire $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire et vraie au rang 0, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On applique le théorème sur les suites croissantes majorées, resp. décroissantes minorées.
Si $u_0 \leqslant u_1$, alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après la question précédente) et majorée par b. Elle est donc convergente.
Sinon $(u_0 > u_1)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (d'après la question précédente) et minorée par a. Elle est donc convergente.

2. La propriété à démontrer est l'appartenance : $\mathcal{Q}(n)$: «$u_n \in I$».
$\mathcal{Q}(0)$ est vraie par hypothèse et $u_k \in I \Rightarrow u_{k+1} \in I$ car $u_{k+1} = f(u_k)$ et $f(I) \subset I$.
$\mathcal{Q}(n)$ est donc héréditaire et, par suite, vraie pour tout $n \geqslant 0$.

3. Soit x et y deux réels appartenant à I et tels que $x \leqslant y$. On a $f(x) \geqslant f(y)$ car f est décroissante sur I. De plus, $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à I car $f(I) \subset I$. Donc, $f(f(x)) \leqslant f(f(y))$ en utilisant à nouveau la décroissance de f sur I. D'où $g(x) \leqslant g(y)$.
Ainsi, on a montré que, pour tous réels $x, y \in I$, $x \leqslant y \Longrightarrow g(x) \leqslant g(y)$ ce qui prouve que la fonction g est croissante sur I.

Partie B

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -3x^2 + 3x = -3(x^2 - x) = -3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$ $-\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$f([0,1]) = \left[0, \frac{3}{4}\right] \qquad \text{et} \qquad f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right].$$

2. $f(x) = x \iff x[3(1-x) - 1] = 0 \iff x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

3. On pose $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. On a $f(I) = \left[\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right]$ donc $f(I) \subset I$.
D'autre part, $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $u_0 \in I$. Toutes les hypothèses de la question A-2 sont vérifiées.
On en déduit que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après B-1, la fonction f est décroissante sur I et, d'après B-3, $f(I) \subset I$. Donc, les hypothèses de la question A-3 sont vérifiées. On en déduit que g est croissante sur I.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}) = g(u_{2n}) = g(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1}) = g(u_{2n+1}) = g(\beta_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_n \in I$ (d'après B-3) et $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$ avec g croissante sur I (d'après B-4). De plus, $I = [a, b]$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{3}{4}$. Donc la suite (α_n) vérifie toutes les hypothèses de la question A-1-b. On en déduit que la suite (α_n) est convergente.
De même, on montre que (β_n) est convergente.

6. Soit x_0 une solution de l'équation $f(x) = x$. Alors, $g(x_0) = f[f(x_0)] = f[x_0] = x_0$.
Notons ℓ la limite de la suite (α_n). Alors il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = \ell$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$ et g est continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme) donc g est continue au point ℓ . D'où $\lim\limits_{x\to\ell} g(x) = g(\ell)$. On en déduit par composition que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\alpha_n) = g(\ell)$. Or , $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = g(\ell)$. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que ℓ est une solution de l'équation $g(x) = x$. Or, d'après l'énoncé et la question B-2, $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2/3$.
Donc $\ell = 0$ ou $\ell = \dfrac{2}{3}$.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2} \leqslant \alpha_n \leqslant \dfrac{3}{4}$, on obtient par passage à la limite dans cet encadrement : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{3}{4}$. Ainsi $\ell = \dfrac{2}{3}$.
De même la limite de la suite (β_n) est solution de l'équation $g(x) = x$.
Comme tous les termes de (β_n) appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ (question B-3), cette suite ne tend pas vers 0. On en conclut que les suites (α_n) et (β_n) convergent vers $2/3$.