Mathématiques - MT11

Tronc commun

Médian - Automne 2012

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants ne doivent faire usage d'aucun document.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (10 points) *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A (3 points)

1. Donner la définition de la convergence d'une suite réelle.
2. Donner la définition d'une suite bornée.
3. Démontrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

Partie B (7 points)

1. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que $\sqrt{x\,y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. Soient x et y deux réels vérifiant $0 < x \leqslant y$. Démontrer les inégalités :
$$x \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y \qquad \text{et} \qquad x \leqslant \sqrt{x\,y} \leqslant y$$
3. Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 < b_0$.
On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
   (a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
   (b) Montrer que (b_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (a_n) est une suite croissante.
   (d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes, et qu'elles admettent la même limite, que l'on notera ℓ.
   (e) Montrer que $\sqrt{a_0\, b_0} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
4. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_0 = 1$ et que $b_0 = 5$.
Quelle est la partie entière de la limite commune ℓ ?

Pensez à changer de copie.

<u>Exercice 2</u> (10 points) *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A (2 points)

1. Rappeler la définition d'une injection f d'un ensemble E dans un ensemble F.
2. Proposer un exemple simple d'application injective et non bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Partie B (8 points)

On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on considère l'application $\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & \dfrac{2}{(z-1)^2} \end{array}$

1. Calculer $f(1+i)$ et $f(i)$.
2. (a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \dfrac{1}{4-3i}$. En déduire $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{4-3i}\right\}\right)$
3. (a) Montrer que f est une surjection de E sur $\mathbb{C}^*$. En déduire l'image de E par f. *Indication : on ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $k \in \mathbb{C}^*$ par f*
   (b) f est-elle injective ? Pourquoi ?
4. Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 2\pi$.
   (a) Démontrer que
   $$\mathrm{e}^{i\theta} - 1 = 2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{2}}$$
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(\mathrm{e}^{i\theta})$.
5. On considère l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \Re\mathrm{e}(z) = 1\}$.
   (a) Déterminer l'image directe de $\Delta \setminus \{1\}$ par l'application f.
   (b) On rappelle que pour tout nombre complexe ω,
   $$\omega \in \mathbb{R}^* \iff [\exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; \arg(\omega) = k\,\pi]$$
   Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^*$.