
Informations importantes

- L'usage de la calculatrice est interdit.
 - Le barème donné est susceptible d'être modifié.
 - Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.
 - La présentation, la qualité de la rédaction, et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.
 - Chaque exercice doit être rédigé sur une nouvelle copie.
-

Exercice 1 (4 points)

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\Delta = 6 - 8i$.
2. Déterminer les solutions complexes de l'équation $(E) : iz^2 + i\sqrt{2}z + 2i + 2 = 0$.

Exercice 2 (4 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x - 4y, 2x + 3y)$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ suivant : $\begin{cases} x - 4y = a \\ 2x + 3y = b. \end{cases}$
2. En déduire que f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3 (7 points)

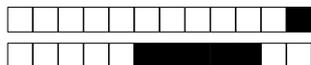
À rédiger sur une nouvelle copie

1. Démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$, $\frac{2x + 1}{(2x + 2)^2} \leq \frac{1}{2x + 3}$.
2. On pose pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. Calculer u_0 et u_1 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'écriture en factorielles des coefficients binomiaux, prouver que :

$$u_{n+1} = \frac{2n + 1}{2n + 2} u_n.$$

4. En utilisant la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n^2 \leq \frac{1}{2n + 1}.$$



NOM :

L M P R S T V W X Z

PRÉNOM :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Numéro étudiant à coder dans la grille ci-contre :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exercice 4 - QCM (5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

1. La négation de $P \implies Q$ est :

- $Q \implies P$ $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ $P \text{ et } \text{non}(Q)$
- $\text{non}(P) \implies Q$ $P \implies \text{non}(Q)$ $\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)$

2. Soient E un ensemble, f une application de E dans E et A un sous-ensemble de E . Lequel des ensembles ci-dessous est $f^{-1}(A)$?

- $\{x \in A, f(x) \in E\}$ $\{x \in E, f(x) \in A\}$ $\{f(x), x \in A\}$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Parmi les sommes ci-dessous, une seule est égale à $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Laquelle ?

- $\sum_{k=0}^n q^k$ $\sum_{k=1}^{n+1} q^k$ $\sum_{k=1}^n q^k$ $\sum_{k=0}^{n+1} q^k$

4. Parmi les assertions ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

- $\prod_{k=0}^1 1 = 1$ $\sum_{k=0}^1 1 = 1$ $\sum_{k=0}^1 k = 1$ $\prod_{k=0}^1 k = 1$

5. Cocher parmi les applications ci-dessous celles qui sont bijectives.

- $f : \{1; 2; 3\} \longrightarrow \{4; 5; 6\}$
1 \longmapsto 4
2 \longmapsto 5
3 \longmapsto 6
- $h : \{1; 2; 3\} \longrightarrow \{4; 5\}$
1 \longmapsto 4
2 \longmapsto 5
3 \longmapsto 4
- $g : \{1; 2; 3\} \longrightarrow \{4; 5; 6\}$
1 \longmapsto 4
2 \longmapsto 5
3 \longmapsto 4
- $\varphi : \{1; 2; 3\} \longrightarrow \{1; 2; 3\}$
 $x \longmapsto |x|$