MÉDIAN MTA1 - AUTOMNE 2018
DURÉE : 1H30

Informations importantes

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Le barème donné est susceptible d'être modifié.**
- **Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- **La présentation, la qualité de la rédaction, et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.**
- **Chaque exercice doit être rédigé sur une nouvelle copie.**

Exercice 1 .... (4 points)

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\Delta = 6 - 8i$.
2. Déterminer les solutions complexes de l'équation $(E) \ : \ iz^2 + i\sqrt{2}z + 2i + 2 = 0$.

Exercice 2 .... (4 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère l'application $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-4y, 2x+3y). \end{array}$

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ suivant : $\begin{cases} x - 4y = a \\ 2x + 3y = b. \end{cases}$
2. En déduire que f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3 .... (7 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

1. Démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$, $\dfrac{2x+1}{(2x+2)^2} \leq \dfrac{1}{2x+3}$.
2. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. Calculer u_0 et u_1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'écriture en factorielles des coefficients binomiaux, prouver que :
$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n.$$
4. En utilisant la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$u_n^2 \leq \frac{1}{2n+1}.$$

NOM : ....

PRÉNOM : ....

Numéro étudiant à coder dans la grille ci-contre :

☐L ☐M ☐P ☐R ☐S ☐T ☐V ☐W ☐X ☐Z
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Exercice 4 - QCM .... (5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

1. La négation de $P \implies Q$ est :

☐ $Q \implies P$ ☐ $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ ☐ P et $\text{non}(Q)$
☐ $\text{non}(P) \implies Q$ ☐ $P \implies \text{non}(Q)$ ☐ $\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)$

2. Soient E un ensemble, f une application de E dans E et A un sous-ensemble de E. Lequel des ensembles ci-dessous est $f^{-1}(A)$?

☐ $\{x \in A,\ f(x) \in E\}$ ☐ $\{x \in E,\ f(x) \in A\}$ ☐ $\{f(x),\ x \in A\}$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Parmi les sommes ci-dessous, une seule est égale à $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Laquelle ?

☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} q^k$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q^k$

4. Parmi les assertions ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

☐ $\displaystyle\prod_{k=0}^{1} 1 = 1$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} 1 = 1$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} k = 1$ ☐ $\displaystyle\prod_{k=0}^{1} k = 1$

5. Cocher parmi les applications ci-dessous celles qui sont bijectives.

☐ $f : \begin{array}{ccc} \{1;2;3\} & \longrightarrow & \{4;5;6\} \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 6 \end{array}$ ☐ $h : \begin{array}{ccc} \{1;2;3\} & \longrightarrow & \{4;5\} \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 4 \end{array}$

☐ $g : \begin{array}{ccc} \{1;2;3\} & \longrightarrow & \{4;5;6\} \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 4 \end{array}$ ☐ $\varphi : \begin{array}{ccc} \{1;2;3\} & \longrightarrow & \{1;2;3\} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$