35 Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3 - k^3$.
2. En déduire (sans raisonner par récurrence) la somme : $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Calculer : $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)$.

$\boxed{35}$ 1. On a :

$$(*) \quad (k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

2. On somme $(*)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{p=2}^{n+1} p^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \cancel{\sum_{p=2}^{n} p^3} + (n+1)^3 - \left(1^3 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k^3}\right)$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

Poun le changement d' indice :

$$\begin{cases} p = k+1 \\ 1 \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} k = p-1 \\ 2 \leq p \leq n+1 \end{cases}$$

D'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2+3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

3. Gma:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 1 + f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier n tq.

$$(*) \quad n \leq x < n+1$$

On cherche $p \in \mathbb{Z}$ tq.

$$p \leq x+1 < p+1$$

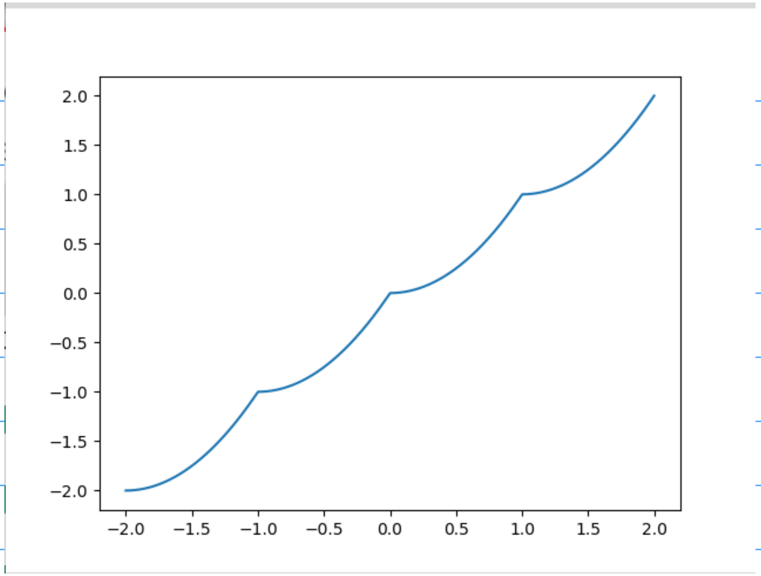
D'après $(*)$

$$\underbrace{n+1}_{p} \leq x+1 < \underbrace{(n+1)+1}_{p+1}$$

Donc, $\lfloor x+1 \rfloor = n+1 = \lfloor x \rfloor + 1$

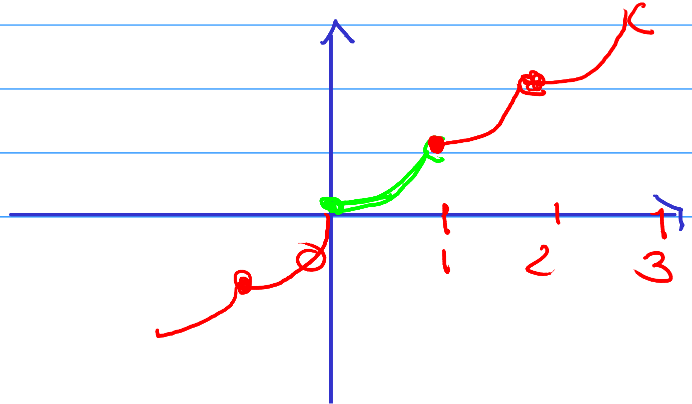
2. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lfloor x+1 \rfloor + (x+1 - \lfloor x+1 \rfloor)^2 \\ &= 1 + \lfloor x \rfloor + (x+1 - \lfloor x \rfloor - 1)^2 \\ &= 1 + f(x). \end{aligned}$$



3. Soit $x \in [0,1[$. Alors

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = 0 + x^2 = x^2$$



38 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\ ,\ ]0,1[\cap\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Notons $A = [0,1]\cap \mathbb{Q}$

L'ensemble des majorants de A : $[1,+\infty[$

L'ensemble des minorants de A : $]-\infty,0]$

Borne sup : $1 = \sup(A)$

Borne inf : $0 = \inf(A)$

$\max(A) = \sup(A) = 1$ car $1 \in A$

$\min(A) = \inf(A) = 0$ car $0 \in A$

Notons $B =]0,1[\cap \mathbb{Q}$

L'ensemble des majorants de : $[1,+\infty[$

L'ensemble des minorants de : $]-\infty,0]$

Borne sup : $1 = \sup(B)$,

Borne inf : $0 = \inf(B)$

Pas de max car $1 \notin B$

Pas de min car $0 \notin B$

Pour $\mathbb{N}$:

ensemble des majorants : $\emptyset$ donc pas de borne sup

ensemble des minorants : $]-\infty, 0]$

borne inf : 0

$\min(\mathbb{N}) = 0$