32 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k! \geqslant 2^{k-1}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Récurrence. Init. à $k=0$ et $k=1$.
Hérédité : $(k \geqslant 1)$

$$(k+1)! = k! \times (k+1) \geqslant 2^{k-1} \times (k+1) \geqslant 2^{k-1} \times 2 = 2^k$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$$

Comme $(u_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente et

$$\lim u_n \leq 4$$

On peut mq. $\lim u_n = \exp(1)$

33 Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

On peut remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

+ th. gendarmes.

34 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

Mq $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$

Donc, $(u_n)_n$ est croissante.

- $v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n} \right)$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n - (n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n+1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

$$\leq 0$$

Donc $(v_n)_n$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - v_n = \frac{-1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ainsi, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. On en déduit qu'elles cv vers la limite.

$\boxed{35}$ À l'aide de la remarque précédente, démontrer que la suite $(u_n)_n$ définie ci-dessous n'est pas convergente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Indication : on pourra considérer les suites extraites (u_{4n}) et (u_{4n+1}).

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{4n} = \cos\left(\frac{4n\pi}{2}\right) = \cos(2n\pi) = \cos(0) = 1 \longrightarrow 1$$

$$u_{4n+1} = \cos\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow 0$$

Donc, $(u_n)_n$ ne converge pas

36 Déterminer des équivalents simples puis les limites éventuelles des suites définies par :

$$u_n = \frac{3^n+1}{5n-n^2}, \quad v_n = \frac{2^n+3^n}{n!+n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

- $u_n \sim \dfrac{3^n}{-n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ par croissances comparées

En effet : $\dfrac{3^n}{3^n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}} \longrightarrow 1$.

- $v_n \sim \dfrac{3^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\boxed{37}$ Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessous est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

2. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

1. Init : $u_0 = 0 \in [0,2]$

Hérédité : . . .

$0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq 4$ $\sqrt{\ }$ est $\nearrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n+2} \leq \sqrt{4}$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2+u_n} - u_n\right)\left(\sqrt{2+u_n} + u_n\right)}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

$$= \frac{2+u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

) ≥ 0 car $u_n \in [0,2]$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P(x) = 2 + x - x^2$. On cherche son signe sur $[0,2]$

On mq. $\forall x \in [0,2]$, $P(x) \geq 0$.

3. Comme $(u_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$

On :

$$l = \sqrt{2+l} \implies l^2 = 2 + l$$

$$\implies l^2 - l - 2 = 0$$

$$\implies \left| \begin{array}{l} l = -1 \\ \text{ou } l = 2 \end{array} \right.$$ (après calculs)

On $l \in [0, 2]$ donc $l = 2$.

24 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

$\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tq $m \leq x < m+1$ (*)

$\lfloor x+n \rfloor$ est l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tq $p \leq x+n < p+1$

D'après (*) :

$$\underbrace{m+n}_{p} \leq x+n < \underbrace{m+n+1}_{p+1}$$

Donc, $p = m+n = \lfloor x+n \rfloor$

Or, $m+n = \lfloor x \rfloor + n$

38 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\ ,\ ]0,1[\cap\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Notons $\mathcal{D}=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Listons les éléments de $\mathcal{D}$:

$(-1)^1+\frac{1}{1}=0$

$(-1)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$(-1)^3+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

$(-1)^4+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$(-1)^5+\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}$

$(-1)^6+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

$(-1)^7+\frac{1}{7}=-\frac{6}{7}$

...

On peut remarquer que

* $\sup\mathcal{D}=\max\mathcal{D}=\frac{3}{2}$
* $\inf\mathcal{D}=-1$
* $\mathcal{D}$ n'admet pas de minimum