1 On considère l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}, \end{array}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Soit $x \in]1;1,5]$. Simplifier :
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$
En déduire la dérivabilité éventuelle de f à droite de 1.
3. En s'inspirant de la question précédente, étudier la dérivabilité éventuelle de f à gauche de 1.
4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

2 Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n = -(b_{n+1} - b_n).$$
2. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \frac{1}{3^n}(b_0 - a_0).$$
3. En déduire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.
4. Justifier rapidement que la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$ est constante.
5. Déduire des questions précédentes que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent et déterminer leurs limites.

3 On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \end{cases}$$

1. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant 2$$
2. On définit la fonction ci-dessous :
$$f : \begin{array}{rcl} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$$
   (a) Justifier rapidement que f est dérivable puis démontrer que :
   $$\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[x_n, 2]$, démontrer que :
   $$|x_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - 2|$$
   (c) En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge et donner sa limite.

4 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Développer $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Résoudre alors :
$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$$

5 Pour quelles valeurs de m le polynôme $P = (X+1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par le polynôme $Q = X^2 + X + 1$?
Indication : On pourra commencer par déterminer le reste dans la division euclidienne de P par Q.

6 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2-x & \text{si } x<1, \\ \mathrm{e}^{-x+1} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans J où J est un intervalle à déterminer.
4. Déterminer f^{-1}, la bijection réciproque de $f : \mathbb{R} \to J$.
5. Étudier les asymptotes éventuelles de f ainsi que la position relative de la courbe représentative de f avec sa (ses) asymptote(s)
6. Tracer les graphes de f et de f^{-1}.

7 On considère le polynôme :

$$P(X) = X^3 - (2+\sqrt{2})X^2 + 2(\sqrt{2}+1)X - 2\sqrt{2}.$$

On note α, β et γ ses racines.

1. Écrire le polynôme P sous forme factorisée à l'aide de α, β et γ.
2. En déduire les valeurs de :

$$\begin{cases} \sigma_1 & = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \sigma_2 & = \alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 \\ \sigma_3 & = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \end{cases}$$

3. Développer $Q(X) = (X-\alpha^2)(X-\beta^2)(X-\gamma^2)$. En déduire les coefficients du polynôme Q.
4. Factoriser Q sur $\mathbb{C}[X]$.
5. En déduire α, β et γ.

8 Écrire la formule du binôme pour $(1+x)^n$, où $x \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation obtenue, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k.$$

9 Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1. Étudier la fonction f (variations, limites éventuelles, asymptotes éventuelles avec leurs positions).
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, en 0.
3. Déterminer J de sorte que l'application $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x) \in J$ soit bijective.
4. Calculer g^{-1}.
5. Montrer que g^{-1} est dérivable en 1/2 et déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1/2)$ de deux manières différentes..
6. Tracer les courbes représentatives de f et de g^{-1} sur un même graphique.

10 Résoudre :

$$\mathrm{e}^z - i\mathrm{e}^{-z} = i - 1$$

11 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) \ : \ \mathrm{e}^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$$