Les nombres complexes

1. Les essentiels

1 Écrire sous forme algébrique :

1. $i\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)$
2. $\frac{1}{4-3i}$
3. $(1+i)(1-2i)$
4. $\frac{1-i}{3+2i}+2\frac{1+3i}{2-3i}$.

2 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$A = (2+i)(1-i)^2$ $\qquad$ $C = \frac{3+2i}{1+i}-\frac{1-2i}{1-i}$

$B = \frac{1+2i}{1-i}$ $\qquad$ $D = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

3 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe complexe z vérifiant l'équation :

a) $|z+i|=0$ $\qquad$ b) $|z-2+i|=\frac{1}{2}$ $\qquad$ c) $|2z+1-i|=3$.

4 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$\left|\frac{z-1}{z+3}\right|=1.$$

5 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z où z vérifie l'équation donnée :

a) $\mathrm{Re}(z+1)=0$ $\qquad$ b) $|z|=2$ $\qquad$ c) $|z+1|=|z|$.

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $\qquad (E)\ :\ z-2\overline{z}+2=0$.

7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $\qquad (E)\ :\ 2\overline{z}-2+6i=z$.

8 Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $c+id\neq 0$. On pose :

$$z=\frac{a+ib}{c+id}.$$

1. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que z soit un nombre réel.
2. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que z soit imaginaire pur.

9 Soient z et z' deux nombres complexes. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

A_1 : Si $z-\overline{z}=0$ alors $z=0$.

A_2 : Si $|z|=1$ et que $|z+z'|=1$ alors $z'=0$.

A_3 : Si $\mathrm{Im}(z+z')=0$ alors z et z' sont conjugués.

A_4 : Si z est sur le cercle trigonométrique alors $1/z$ l'est aussi.

10 Écrire sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle le nombre complexe :

$$\chi=\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}.$$

11 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i},\quad z_2=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{2-2i},\quad \text{et}\quad z_3=(1-i)^6.$$

12 On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\qquad\text{et}\qquad z_2=1-i.$$

1. Donner la forme exponentielle de z_1z_2 et de $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

13 Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)\cos(3x)$,
2. $\cos^2 x . \sin^2 x$,
3. $\cos^3 x + 2\cos^2 x$,
4. $\sin^2(3x) + \cos^2(2x)$.

14 Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Écrire $\dfrac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ sous forme algébrique.

2. Pour travailler seul

15

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Démontrer l'équivalence :

$$z^2 = \left(z'\right)^2 \iff z = z' \text{ ou } z = -z'.$$

2. (a) On considère le nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   Calculer z^2 et l'exprimer sous forme algébrique.

   (b) Déterminer la forme algébrique de $\left(e^{i\pi/8}\right)^2$.

3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

16 En utilisant l'écriture algébrique des nombres complexes, déterminer l'ensemble des points M d'affixe complexe z tels que $|z| = 2|z - i|$.

17 Représenter l'ensemble des points M d'affixe complexe z vérifiant l'équation :

$$|z + 2| = 1.$$

18 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = \frac{(1+i)^{12}}{(1-i)^8} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(-1+i)^9}{(1+i)^{15}}.$$

S'exprimer et raisonner en mathématiques

1. Les essentiels

19 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne prend que des valeurs positives
2. f s'annule
3. f est majorée
4. f est bornée
5. f n'est pas la fonction nulle
6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts
7. f est la fonction nulle
8. f s'annule une seule fois
9. f est paire
10. f atteint toutes les valeurs de l'ensemble $\mathbb{N}$.

20 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
4. $\forall x \in I, (f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
5. $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant 0$
6. $\forall a > 0, \exists x \in I,\ f(x) = a$
7. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) + M = 0$
8. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.

21 Écrire, sans justification, la négation des assertions suivantes :

(P_1) : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in]0,+\infty[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \geqslant M \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \varepsilon\right)$.

(P_2) : $\forall a \in \mathbb{R},\ \big(a = 0 \text{ ou } a \neq 0\big)$.

22 Étant données P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant les tables de vérité que :

$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \equiv (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R).$$

23 Soient P et Q deux assertions. À l'aide de tables de vérité, simplifier les assertions :

1. $(P \Rightarrow Q)$ et $\big(\text{non}(P) \Rightarrow Q\big)$
2. Q et $(Q \Rightarrow P)$
3. $(P \Rightarrow Q)$ et $\big(\text{non}(P) \Rightarrow Q\big)$.

24
1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b. On considère l'implication $(\star)$ suivante :
$$\big(\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi\big) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$
   (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
   (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
   (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
   (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

25 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ les assertions suivantes :

$\mathscr{P}$: « f est une fonction affine »

$\mathscr{Q}$: $\exists a \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = a(x-y)$.

1. L'implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ est-elle vraie ? Justifier.
2. La réciproque de $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ est-elle vraie ? Justifier.
3. Que peut-on en déduire ?

2. Pour approfondir

26 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le nombre n^2+n est un entier pair.

27 Soit a un nombre réel vérifiant : $\forall \varepsilon > 0,\quad |a| < \varepsilon$. Démontrer que $a = 0$.

28 On cherche à démontrer par analyse-synthèse que les fonctions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ vérifiant $(*)\ \forall(m,n)\in\mathbb{N}^2,\quad f(m+n)=f(m)f(n)$, et n'étant pas la fonction nulle sont exactement les fonctions $f_a\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ n & \mapsto & a^n\end{array}$ avec $a\in\mathbb{N}$.

1. **Analyse.** On suppose que $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ vérifie $(*)$ et que f n'est pas la fonction nulle.
   (a) Démontrer que $f(0)=1$.
   (b) Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=f(1)^n$.
2. Il existe donc un entier $a\in\mathbb{N}$ tel que $f=f_a$ (cet entier a étant $f(1)$). L'étape d'analyse est alors achevée. Rédiger maintenant l'étape de **synthèse** et **conclure**.

29 On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\quad f(x)f(y)-f(xy)=x+y.$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $f(0)=1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x.
3. Conclure en raisonnant par analyse-synthèse.

3. Pour travailler seul

30 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

1. $\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\quad f(x)=C$,
2. $\forall x\in I,\quad \big(f(x)=0\Longrightarrow x=0\big)$,
3. $\forall x\in I,\ \forall y\in I,\quad \big(x\leqslant y\Longrightarrow f(x)\leqslant f(y)\big)$,
4. dans le cas où $I=\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+\pi)=f(x)$.

31 On considère l'assertion (P) : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \big(x^2\geqslant 5\Longrightarrow x\geqslant\sqrt{5}\big)$. Écrire la négation de (P). L'assertion (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

32
1. Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que l'assertion suivante est une tautologie :

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q))$$

En déduire la négation de l'assertion suivante : «La fonction f est injective ou surjective».

2. Démontrer que l'assertion suivante est une tautologie :

$$\Big((\text{non}(P)\Rightarrow Q) \text{ et } \text{non}(Q)\Big)\Longrightarrow P.$$

À quel raisonnement correspond ce résultat ?

33 *« Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. Je ne mange pas de pop corn. »* Que peut-on en déduire ?

- ☐ Je dors.
- ☐ Je ne dors pas.
- ☐ Je ne vais pas au cinéma.
- ☐ Je ne porte pas mes lunettes.
- ☐ Je vais au cinéma et je dors.
- ☐ Je ne porte pas mes lunettes et je ne vais pas au cinéma.

34 Les phrases suivantes signifient-elles $A\Rightarrow B$ ou $B\Rightarrow A$?

1. Si A, alors B.
2. Pour que A, il faut que B.
3. Pour que A, il suffit que B.
4. A est une condition suffisante pour B.
5. A est une condition nécessaire pour B.
6. A dès que B.
7. A est faux si B l'est.

Trigonométrie et compléments de calcul algébrique

1. Équations et inéquations

35 Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;2]$.

36 Montrer que, pour tous réels x et y :

1. $\sqrt{|x-y|} \leqslant \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|$
2. $|x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$

37 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) : $4x+2=\sqrt{3-2x}$

(E_2) : $\sqrt{m+x}-\sqrt{1+x}=1$ où $m \in \mathbb{R}$

38 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) : $\lfloor x \rfloor = -5$

(E_2) : $\left\lfloor x^2-1 \right\rfloor = 2$.

39 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\lfloor x \rfloor + (x-\lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1)=1+f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) : $|x-5|=2\,|x+5|$

(E_2) : $|2-x|+|2x-1|=2$

(E_3) : $x+|x-1|=1+|x|$

(E_4) : $2x^2+|x-1|=|x+1|$.

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $\dfrac{x}{x-4} \geqslant \dfrac{1}{x+5}$
2. $x^3+5x \leqslant 6x^2$
3. $|5-x| \leqslant 2$
4. $|x-2|+|x-1|<3$
5. $\left|1-2x^2\right| \geqslant 3$
6. $x^2+|x-1|-|2x+1|<0$

42 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x-2|$
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-2$
3. $\sqrt{1-x^2} \leqslant m-x$ où $m \in \mathbb{R}$.

2. Trigonométrie

43 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes d'inconnue x et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$
2. $2\sin^2 x = 1$
3. $\sin^2 x + 3\cos x + \frac{3}{4} = 0$
4. $\sin(2x)=\cos(x)$.
5. $2\cos x = \sqrt{3}$
6. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$
7. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$
8. $\tan(x)=\sqrt{3}$.

44 Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2\sin x \leqslant \sqrt{3}, \qquad 1+2\sin x \geqslant 0, \qquad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0.$$

45 Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ les inéquations suivantes :

$$2\cos(x) \geqslant 1, \qquad |\sin(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos^2 x > 1.$$

46

1. Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation $\cos(2x)=\dfrac{1}{2}$ d'inconnue x.
2. Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ l'équation $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'inconnue x :

3. Produits et sommes

47 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$\begin{aligned} A_n &= 2^5+3^5+4^5+\cdots+n^5,\\ B_n &= 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n),\\ C_n(x) &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n,\\ D &= \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{3^{101}}\right). \end{aligned}$$

48

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   En déduire pour $n \geqslant 2$, la somme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)$.

2. Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

49 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$;
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{3}{5^k}\right)$;
5. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}(3k-2)$.

50 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\sqrt{3^k}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}|k-n|$;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$;
4. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} x^j$ où $x\in\mathbb{R}$;
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, où $n\geqslant 2$.

51 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $\quad 1-e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

52 Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul : $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

53

1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3-k^3$.
2. En déduire pour $n\in\mathbb{N}$ la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Calculer : $\quad 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)$.

54 Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

55 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\qquad \sum_{j=1}^{2n}3^j\binom{2n}{j}.$$

56 Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

57 *Final 2024.* On fixe un entier naturel non nul n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $k\in[\![1,n]\!]$, $\quad k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la formule explicite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ en fonction de n.

58 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

59 Exprimer, pour θ un nombre réel quelconque, $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

60 Démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$
2. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$

4. Pour travailler seul

61 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

62 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

63 Soit $x \in [0,\pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n\sin(x).$$

64 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$\begin{aligned}
A_n &= 4+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1},\\
B_n(x) &= 2x+4x^2+8x^3+\cdots+1024x^{10},\\
C_n &= 1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times n,\\
D_n &= \left(2+3^2\right)\times\left(2+3^4\right)\times\left(2+3^6\right)\times\cdots\times\left(2+3^{84}\right).
\end{aligned}$$

65 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)$;
2. $\sum_{k=0}^{n} 3^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{3^i}{2^{3i+2}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(2k-\frac{5}{7^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(2k-3)$.

66 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n.

Suites réelles

1. Les essentiels

67 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=-1$ et $u_1=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n.$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $a_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ et $b_n=2^n u_n$.

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

68 On pose $u_0=\dfrac{1}{3}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+3u_n}$.

1. Démontrer que $u_n>0$ pour tout entier n.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n.

69
1. Soit a et b deux constantes réelles. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :
$$u_{n+2}=a\,u_{n+1}+b\,u_n.$$
On suppose que l'équation $x^2=ax+b$ d'inconnue x admet au moins une solution c. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_{n+1}-c\,u_n$ est géométrique de raison $a-c$.
2. On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} F_0=0\,;\quad F_1=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$$
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=x+1$.
   On notera Φ la solution positive et φ la solution négative.
   (b) En utilisant la première question,, exprimer F_n en fonction de n, de Φ et de φ.
   (c) Déterminer la limite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

70 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\quad\text{et}\quad v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.
2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

71 On définit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=2\sqrt{n}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

72 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n=\dfrac{3^n}{2^n}$
2. $u_n=\dfrac{2n+3}{3n-5}$
3. $u_n=\mathrm{e}^{1-n}$
4. $u_n=5n+7-n^2$
5. $u_n=n-\ln n$
6. $u_n=n+5\cos n$
7. $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$
8. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

73 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n=\dfrac{2^n}{3^n}$
2. $u_n=\dfrac{2n^2+3n}{n^2-n+2}$
3. $u_n=n-\exp(n)$
4. $u_n=2\sin(n)-n$
5. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$
6. $u_n=\dfrac{2n^5}{n!}$
7. $u_n=\dfrac{n!}{3^n}$

74 Classer par ordre croissant pour la relation « est négligeable devant » :

$$(2n)!,\quad n^n,\quad e^{2n},\quad n!,\quad n\ln(n),\quad (\sqrt{n})^n.$$

75 Démontrer les relations ci-dessous au voisinage de $+\infty$:

$$n^3+3n\sim n^3,\quad n-\ln(n)\sim n,\quad 3\ln(n)\not\sim\ln(n),\quad n^{24}+4\ln(n)=o\left(e^n\right).$$

76 Démontrer les relations ci-dessous au voisinage de $+\infty$:

$$2n^2-n\sim 2n^2,\quad \exp(2n)+n^3+n!\sim n!,\quad 2n^2\not\sim n^2.$$

77 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2}, \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n-u_n^2. \end{cases}$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

78 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ si $n\in\mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

79 On considère la suite définie par son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser la valeur de sa limite.

80 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{6n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{6n+1}$.
2. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Pour approfondir

81 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=3 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=-2u_n+\pi. \end{cases}$$

1. Soit α un nombre réel. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n=u_n-\alpha$ soit une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

82 Soit $(s_n)_n$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

83 *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k\geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $H_n\geqslant\ln n+\frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}$.
2. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $H_n\leqslant 1+\ln n$. *Indication* : $H_n=1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$v_n=H_n-\ln n\quad\text{et}\quad w_n=v_n-\frac{1}{n}.$$

   (a) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n=\ln n+\gamma+\varepsilon_n\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0.$$

3. Pour travailler seul

84 Quelle est la raison d'une suite géométrique $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = 150\ ?$$

85 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

86 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite. On pose $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.
2. Déterminer un entier p tel que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice :

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5		
10		
15		

4. Déduire de ce tableau une valeur décimale approchée de ℓ aussi précise que possible.On indiquera la précision de cette approximation.

87 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Que pensez-vous des assertions suivantes :

- Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, il en est de même pour (u_n).
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même pour (u_n).

88 *Médian 2014.* 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

(a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
(b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} b_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1. \end{cases}$

On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant b_n < 0.$$

(b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n.
(c) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(d) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(e) Démontrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k$$

est convergente.

Ensembles et applications

1. Les essentiels

89 On considère l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. Peut-on écrire

1. $a \subset E$?
2. $a \in E$?
3. $\{a\} \subset E$?
4. $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$?
5. $\emptyset \subset E$?
6. $\emptyset \in E$?
7. $\{\emptyset\} \subset E$?
8. $\{\emptyset\} \subset \mathscr{P}(E)$?
9. $\{a\} \in E$?

90 On considère les quatre parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 3k\} \qquad B = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 12k\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 15k\} \qquad D = \{n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 100\}$$

1. Définir chaque ensemble précédent à l'aide d'une phrase en français.
2. Donner la liste des éléments de $B \cap D$.
3. Déterminer $A \cup B \cup C$.
4. Déterminer $A \cap B \cap C$ et donner la liste des éléments de $D \cap B \cap C$

91 *Final 2024.* Soit E un ensemble quelconque. Pour toutes parties A et B de E, on définit $A \triangledown B$ par :

$$A \triangledown B = \overline{A \cup B}.$$

1. Soit A une partie de E. Simplifier les ensembles $A \triangledown \emptyset$, $A \triangledown A$ et $A \triangledown \overline{A}$.
2. Pour deux parties A et B de E, simplifier l'ensemble $(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B)$.
3. Dans cette question, on suppose que :

$$E = \mathbb{R}, \quad A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x+3| \leqslant 2\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \lfloor x \rfloor = -6\}.$$

Exprimer $A \triangledown B$ sous la forme d'une réunion d'intervalles.

92 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
2. $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

93 Un sondage effectué auprès de 150 individus a donné les résultats suivants :

- À la question «consommez-vous régulièrement des légumes ?», 50 individus répondent oui.
- À la question «êtes-vous sportif ?», 80 individus répondent oui.
- À la question «êtes-vous un sportif qui consomme régulièrement des légumes ?», 35 personnes répondent oui.

Parmi les individus interrogés, combien ne sont pas sportifs et ne consomment pas régulièrement des légumes ?

94 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A \cup (A \cap B) = \ldots$

   (a) A (b) B (c) $\cap B$ (d) $A \cup B$

2. On pose $I = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 4\}$. Alors $I \cap \mathbb{Z} = \ldots$

   (a) $\{-1;1\}$ (b) $\{0;1;2\}$ (c) $\{0;-1;1\}$ (d) $]-2;2[$

3. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a,b\}))$ est égal à ...

   (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

4. Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

   (a) 87^{100} (b) $\binom{100}{87}$ (c) -87^{100} (d) $-\binom{100}{13}$

5. Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^\star$. A et B sont deux parties de E, de cardinaux respectifs p et q tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. On suppose que $A \subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A \subset X \subset B$?

   (a) 2^q (b) $2^q - 2^p$ (c) 2^{q-p} (d) $\binom{q}{p}$

95 Pour chacune des applications f ci-dessous, étudier la bijectivité de f et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-2}+3 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [3,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y) \end{array}$

96 Pour chacune des applications f ci-dessous, étudier la bijectivité de f et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y,x-2y) \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y^2) \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,xy) \end{array}$

97 Étudier si l'application f définie ci-dessous est bijective et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{i\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{3\} \\ z & \mapsto & 1+\dfrac{2z}{z-i}. \end{array}$$

98 On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x-1}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & [1;+\infty[\\ x & \mapsto & 1+4x^2. \end{array}$$

1. Calculer $(f\circ g)(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.
2. Calculer $(g\circ f)(x)$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.
3. Que peut-on en déduire ?

99

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est définie par : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=e^{it}$.
2. On note $\mathbb{U}=\{e^{i\theta}\in\mathbb{C},\theta\in\mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on considère l'application g suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+\dfrac{1}{z}. \end{array}$$

Déterminer $g(\mathbb{U})$.

100

1. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$ où f est l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

2. Déterminer $g([-1;4])$ où g est l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$

101 Déterminer les ensembles $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}([-1,0])$ où f est l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

102 Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{2;3\})$ de l'ensemble $\{2;3\}$ par l'application f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x\rfloor. \end{array}$$

103 Déterminer $f^{-1}([-1,8])$ où f est l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$

2. Pour approfondir

104 Soient E un ensemble et f une application définie sur $\mathscr{P}(E)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties X et Y disjointes de E,

$$(\star) \quad f(X \cup Y) = f(X) + f(Y).$$

1. Démontrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Démontrer que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
3. Soient A et B deux parties quelconques de E.
   (a) Écrire $A \cup B$ comme la réunion de deux parties disjointes de E.
   (b) Démontrer que :
   $$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

105 On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}$:

$$E = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}.$$

1. Démontrer que : si $z \in E$ alors $|z-i|^2 < |z+i|^2$.
2. En déduire que : $\forall z \in E,\ \dfrac{z-i}{z+i} \in D$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe Z, on a :
   $$\mathrm{Im}(iZ) = \mathrm{Re}(Z) = \frac{Z + \overline{Z}}{2}.$$
4. On considère l'application f définie par :
   $$f : \begin{array}{ccc} E & \to & D \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}.$$
   Démontrer que f est bijective.

3. Pour travailler seul

106 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{a\})\big)$.

107 Étant données A et B deux parties d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$

108 On considère deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. g est-elle bijective ?
3. Déterminer $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

109 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y) \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ z & \mapsto & \sqrt{2}\overline{z} + iz \end{array},$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ X & \mapsto & \{1;2;3\} \cup X \end{array}.$$

110 *Final 2017.* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}.$

Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective.

Limites et continuité

1. Les essentiels

111 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \ldots$

1. $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\frac{x - \ln x}{x}$
3. $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
4. $\frac{\sin(3x)}{x}$
5. $\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $\frac{\cos x}{x^2}$
7. $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$
8. $\frac{\cos x - 1}{x^2}$.

112 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2x}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} - \ln x\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

113 Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Démontrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote en $+\infty$ et étudier sa position locale au voisinage de $+\infty$ par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = \frac{\ln(x) + 1 - x}{x + x^2}$
2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - x$
3. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{5x}$
4. $f(x) = -x\,e^{-x} + 1 - 3x$

114 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) - \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= \ln(2) + 2x - \ln\left(1 + e^{2x}\right). \end{aligned}$$

2. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

115 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sin(x)$.

1. Proposer une suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\left(f(u_n)\right)_n$ tende vers $+\infty$.
2. Proposer une suite $(w_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\left(f(w_n)\right)_n$ converge vers 0.
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Justifier.

116 Démontrer les équivalents ci-dessous entre fonctions.

1. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$
2. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln(x)}$
3. $\sin\left(e^x - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $\frac{\sqrt{x} - e^x + 2x^{22}}{\sqrt{x}\ln(x) - \sqrt{x} + x + 18} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{e^x}{x}$.

117
1. Démontrer l'équivalent suivant au voisinage de 0 : $\sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} x^{\frac{1}{4}}$.
2. Déterminer un équivalent de la fonction $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

118 Soit $k \in \mathbb{R}$, k fixé. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1, \\ -2x + k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

119 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+b & \text{si } x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.

120 Étudier la continuité en 0 de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

121 Dans chaque cas, étudier si la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0.

1. $f\ :\ x\mapsto\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$
2. $f\ :\ x\mapsto\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $f\ :\ x\mapsto\dfrac{e^{2\sin x}-1}{x}$
4. $f\ :\ x\mapsto\dfrac{|\sin(x)|}{x}$.

122 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $x^5-x^4+1=0$ dans $I=[-1;0]$,
2. $\tan x=x+1$ dans $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,
3. $e^x=2-x$ dans $\mathbb{R}$,
4. $\sin(x)+1=x$ dans $I=\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

123 Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f([0;1])\subset[0;1]$. Démontrer qu'il existe $c\in[0;1]$ tel que $f(c)=c$.

Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

2. Pour approfondir

124 Soit x un nombre réel strictement positif. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

125 Étudier la limite éventuelle lorsque x tend vers 1 de : $\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$.

126 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $x\mapsto f(x)-x$ est bornée sur $[2;+\infty[$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

127 L'équation $x^5=5x-1$ admet-elle des solutions réelles ? Si oui, combien ?

128 *Final 2024.* Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad f_n(x)=(x+1)e^{nx}.$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner la limite de la fonction f_n en $+\infty$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,+\infty[$.
3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x)=n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
   (b) Déterminer la valeur exacte de u_1.
4. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Simplifier l'écriture du nombre $f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
   (b) Prouver que pour tout entier naturel non nul n,
   $$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\ln(n)}{n}.$$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et donner sa limite.
5. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. En partant de l'égalité $f_n(u_n)=n$, démontrer que
   $$u_n=\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(1+u_n)}{n}.$$
   (b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

129

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$.
2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in [-1;1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3. Pour travailler seul

130 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2 + 1\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)} - 1\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$.

131 Étudier si les fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}^*$ sont prolongeables par continuité en 0.

1. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$.

132 Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f ci-dessous admet en $+\infty$ une asymptote dont on précisera l'équation.

$$\begin{array}{rcccc} f & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)-1}{\sqrt{x}} + 3x. \end{array}$$

133 Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f ci-dessous admet en $-\infty$ une asymptote dont on précisera l'équation.

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}\setminus\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{4x^3-3x^2}{x^2-8} + 1. \end{array}$$

134 *Final 2012.*

1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$\begin{array}{rcccc} g & : &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10. \end{array}$$

2. Démontrer que g bijective de $]-1,+\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.
3. En déduire que l'équation $10\ln(1+x)+x^2+2x-10 = 0$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
4. On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
6. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x-1$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

Résolution d'équations à variable complexe

1. Les essentiels

135 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

1. $z^2+z+1=0$,
2. $z^6+z^3+1=0$,
3. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où $\theta\in\mathbb{R}$,
4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
5. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
6. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$,
7. $2z^4-(2+i)z^2+1-i=0$,
8. $z^3=4\sqrt{2}(1+i)$

136 Déterminer les racines

1. carrées de $11+4i\sqrt{3}$,
2. cubiques de $8i$,
3. sixièmes de -27,
4. cubiques de $4(\sqrt{3}-i)$.

137 On considère l'équation d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ Z^2-2iZ-2=0.$$

1. Résoudre (E).
2. Soit z un nombre complexe écrit sous forme algébrique $z=a+ib$ avec a et b des nombres réels. Déterminer le module et un argument de e^z.
3. En déduire les solutions de l'équation (S) ci-dessous d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$(S)\ :\ e^{2z}-2ie^z-2=0.$$

138 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z=1$,
2. $e^z=2i$,
3. $e^z=\sqrt{3}+3i$,
4. $e^z-2e^{-z}+2=0$,
5. $e^{2z}=1+i\sqrt{3}$,
6. $e^z=-1$.

139 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

1. Calculer la somme et le produit des n racines n-ièmes de l'unité.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

140 Soient $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$ et ω une racine n-ième de l'unité telle que $\omega\neq 1$. On pose :

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

2. Pour approfondir

141 *Médian 2011.*

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4=1$ d'inconnue Z.

   (b) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :
   $$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1.$$
   On donnera les solutions sous forme algébrique.
2. (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Placer les points A, B et C d'affixes respectives :
   $$a=-2,\quad b=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\quad\text{et}\quad c=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i.$$

   (b) Prouver que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle que l'on déterminera.
3. (a) Placer le point D d'affixe $d=-\frac{1}{2}$.

   (b) Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :
   $$z'=\frac{a-c}{d-c}.$$

   (c) En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

   (d) Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

142 1. Déterminer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

143 On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on considère l'application $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^\star \\ z & \mapsto & \frac{2}{(z-1)^2} \end{array}$.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = \frac{1}{4-3i}$.
3. Démontrer que $f(E) = \mathbb{C}^\star$. *On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha \in \mathbb{C}^\star$ par f.*
4. Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 2\pi$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{e}^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(\mathrm{e}^{i\theta})$.
5. On considère l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ \Re\mathrm{e}(z) = 1\}$. Démontrer que

$$f(\Delta \setminus \{1\}) =]-\infty, 0[.$$

144 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue z.
2. Démontrer que cette équation admet exactement $n-1$ solutions, toutes réelles.

145 On définit l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y), \quad \text{où } z = x+iy \text{ avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction exp.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\exp(z) = \alpha$.
3. En déduire que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

146 À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il réel ?

3. Pour travailler seul

147 1. Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ sous forme algébrique.

2. Écrire le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

148 On considère le nombre complexe $u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. On pose encore :

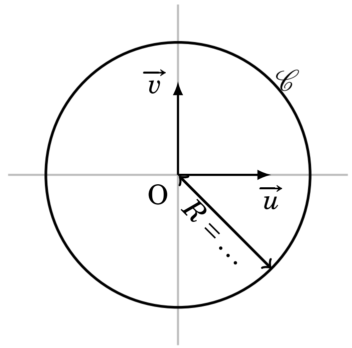
$$S = u + u^2 + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Simplifier u^7.
   (b) Calculer la somme $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$.
   (c) Calculer le produit $uu^2u^3 \ldots u^6$.
2. (a) Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
   (b) Donner la valeur de $S+T$ et calculer $S \times T$.
   (c) Démontrer que la partie imaginaire de S est positive.
   (d) En déduire les valeurs exactes de S et T.
3. Calculer la somme :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

149 *Final 2021.* 1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^6 = 8$, d'inconnue z.

2. Dans le plan ci-contre, représenter les solutions de (E) sur le cercle $\mathscr{C}$ dont on indiquera la valeur du rayon R.



Dérivabilité

1. Les essentiels

150 Dans chacun des cas suivants :
- préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable et calculer f',
- déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f : x \mapsto \ln(\ln x)$, où $a = \mathrm{e}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{5 + \sin x}$, où $a = 0$
3. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, où $a = 0$
4. $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, où $a = 0$
5. $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, où $a = 1$
6. $f : x \mapsto x^x$, où $a = 1$.

151 Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f (en ayant déterminé les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f).

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$
2. $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$
4. $f : x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$.

152 Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{5x}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
3. $h : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$
4. $\varphi : x \mapsto \cos(2x)$.

153 Étudier la dérivabilité des fonctions f, g, h et u définies par :
- $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$,
- $g(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$, si $x \neq 1$ et $g(1) = 1$,
- $h(x) = \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$,
- $u(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

154 Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

155 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie comme suit sur $\mathbb{R}^+$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0;1], \\ a x^2 + b x + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

156 La fonction φ est définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1. Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [1;+\infty[$. Démontrer que φ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$.

157 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 2$. Démontrer que f est bijective et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

158 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $-x \leqslant \sin x \leqslant x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(1+x) < x$;
3. $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$.

159 Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

160 *Final 2024. Dans cet exercice, on admet que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. (a) Démontrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
2. La fonction f' est-elle continue en 0 ? Justifier.
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant 1.$$

2. Pour approfondir

161 On considère la fonction dérivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

1. (a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f, ainsi que les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1-(f(x))^2.$$
3. (a) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner une expression simple de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in J$.

162 Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que $f(I)\subset I$ et qu'il existe un réel $k\in[0,1[$ tel que

$$\forall x\in I,\quad |f'(x)|\leqslant k.$$

On considère une suite (u_n) définie par

$$u_0\in I\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n).$$

1. Prouver que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution sur le segment I. On la notera α.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant k|u_n-\alpha|$
3. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n-\alpha|\leqslant k^n|u_0-\alpha|$
4. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
5. **Application** : on définit la fonction f par $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variation.
   (b) On pose $I=\left[\frac{1}{2},1\right]$. Prouver qu'il existe un réel $k\in[0,1[$ tel que pour tout $x\in I, |f'(x)|\leqslant k$.
   (c) Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par
$$u_0=\frac{1}{2}\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n).$$

163

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que :
$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ 0\leqslant\tan x-x\leqslant x(\tan x)^2.$$
2. On considère la fonction $f:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
   (a) Étudier la parité de f.
   (b) Démontrer que f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
   (d) Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}=\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in\mathscr{D}$.

164 *Final 2017.* Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

1. En remarquant que pour tout réel x, $f_n(x)=e^{-x}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$, justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n{}'(x)=-e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$
2. Démontrer que : $\forall x\in[0,1],\quad \left|f_n'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{n!}$.

3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[0,1]$.
4. On considère la suite de terme général $u_n = \mathrm{e}\, f_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Utiliser la question 3 pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

3. Pour travailler seul

165 1. Démontrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

166 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Démontrer que : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
   Indication : considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

167 *Final 2014.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Démontrer que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant : $\mathrm{e}^x - 1 - x \underset{(x\to 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
3. Démontrer que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
5. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Déterminer l'équation de l'asymptote Δ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Déterminer les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty,0]$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

Polynômes

1. Les essentiels

168 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$. *On pourra s'intéresser à l'ensemble des racines de P.*

169 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. *On raisonnera par analyse/synthèse. Si un tel polynôme P existe, on donnera son degré et on calculera $P(1)$ et $P(i^2)$.*

170 Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $X^4 + X^2 + X + 2$ par $X^2 - 3$
2. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$
3. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
4. $4X^3 + 2iX^2$ par $X + i$.

171 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

1. $X+3$
2. $X^2 - 6X - 16$
3. $(X+3)^2(X+2)$.

172 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne :

1. du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$
2. du polynôme $X^n + nX + 1$ par le polynôme $X^2 - 3X + 2$
3. du polynôme $(\cos(\theta)X + \sin(\theta))^n$ par le polynôme $X^2 + 1$.

173 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X + \sqrt{3})^{2025}$ par $X^2 + 1$.

174 Déterminer deux réels a et b pour que $aX^{25} + bX^{24} + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

175 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

1. $4X^2 - X - 3$
2. $X^3 - 8$
3. $X^6 + 1$
4. $X^7 - 1$
5. $X^2 + X + 1$
6. $X^4 + X^2 + 1$.

2. Pour approfondir

176 *Final 2018.* Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}\left[\cos\left(\mathrm{Im}(z)\right) + i\sin\left(\mathrm{Im}(z)\right)\right]$$

n'est pas polynomiale.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas une fonction polynomiale.

177 *Médian 2010.* Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P = (1+X)^n - X^n.$$

1. Quel est le degré de P ? Donner son coefficient dominant.
2. Démontrer que si z est une racine de P alors $\mathfrak{Re}(z) = -\frac{1}{2}$
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x,
$$e^{ix} - 1 = 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}.$$
   (b) Déterminer les racines de P. On les exprimera en fonction des racines n-ièmes de l'unité.
   (c) Écrire chaque racine de P sous forme exponentielle. En déduire le module et un argument de chacune de ces racines.
4. On note $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les racines du polynôme P. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de l'entier $n \geqslant 2$, l'équation ci-dessous d'inconnue x :
$$(1+x)^n = x^n.$$

178 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que le polynôme $P = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

179 *Final 2012.* Pour tout entier naturel n non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

1. Calculer son polynôme dérivé $P_n'(X)$.
2. Démontrer que 1 est la seule racine multiple de $P_n(X)$.
3. On considère la fonction polynômiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^\star.$$

   (a) En identifiant $f(x)$ comme étant la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique, calculer de deux façons différentes $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

   (b) En déduire le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par le polynôme $(X-1)^2$.

4. On note $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P_4(X)$ par $(X-1)^2$ et on désigne par a, b et c les racines complexes du polynôme $Q(X)$.

   (a) Factoriser $Q(X)$ en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}[X]$.

   (b) Calculer la somme :

$$\sigma = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}.$$

180 1. Soit $P = X^2 - 4X + 5$. Décomposer le polynôme P en produits facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On considère le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X - 1 + 2i.$$

   (a) Démontrer que Q a une racine en commun avec P.

   (b) Effectuer la division euclidienne de Q par $X - \alpha$ où α est la racine commune à P et Q trouvée à la question précédente.

   (c) En déduire la décomposition de Q en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

181 1. Déterminer les racines cubiques de -1 c'est-à-dire les solutions de l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^3 = -1$$

2. On note ω la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive.

   (a) Vérifier que $\omega + \overline{\omega} = 1$.

   (b) Démontrer que ω et $\overline{\omega}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

3. Soient n un entier naturel non nul fixé, et le polynôme

$$P(X) = X^{2n} - (X-1)^n + X^n + 1$$

   (a) *On admet que* $P(\overline{\omega}) = \overline{P(\omega)}$
   Démonter que P est divisible par $X^2 - X + 1$ si, et seulement si, $P(\omega) = 0$.

   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polynôme P soit divisible par $X^2 - X + 1$. *On rappelle, d'après* 2(b), *que* $\omega - 1 = \omega^2$.

4. En utilisant l'écriture algébrique de $P(\omega)$, déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$.

182 Soient p et q deux entiers naturels. Obtenir une relation entre coefficients binomiaux à l'aide de l'égalité : $(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$.

3. Pour travailler seul

183 On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$. On pose $u = 1 + e^{i\theta}$

1. Écrire $1 + e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + (2 + 2\cos\theta) = 0.$$

En déduire la seconde solution de cette équation.

184 Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On pose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. En déduire la factorisation de $P(z)$.
3. En calculant $P(1)$, prouver que : $\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$.
4. En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

185 *Final 2016.* Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z - \alpha| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.
   (a) Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$. Démontrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

186 *Final 2019.* Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme :

$$P_n(X) = X^n - (X-1)^n.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_n(z) = 0$ d'inconnue z. On exprimera les solutions en fonction des racines n-ièmes de l'unité.
2. Vérifier que, pour tout réel θ, $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. Déterminer les écritures exponentielles des racines complexes du polynôme $P_n(X)$.

187 *Final 2014.* On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée α ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer α.

1. Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$?
2. En déduire que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine double de P.
3. Montrer que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$P(X) = (X - \alpha)^2 (X - \overline{\alpha})^2.$$

4. En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
6. Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer α.

Fonctions trigonométriques réciproques

188 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right),\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \arctan(1),\quad \arcsin(0).$$

189 Calculer :

$$\arccos(0),\quad \arccos(-1),\quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \arctan\left(\sqrt{3}\right),\quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

190 Soit $x \in [-1,1]$.

1. Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)),\qquad \cos(2\arcsin(x)).$$

2. Démontrer que :

(a) $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

191 Démontrer la formule ci-dessous :

$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

192 Démontrer que pour tout réel x positif, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$.

193 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f\ :\ x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),\qquad g\ :\ x \mapsto \arcsin x.$$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
3. En déduire une relation entre f et g.

194 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

1. Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simplifier de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

195 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

196 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

197 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0,1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1,0]$.