

Les nombres complexes

1. Opérations sur les nombres complexes

1 Écrire sous forme algébrique :

$$1. i \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} i \right)$$

$$2. \frac{1}{4-3i}$$

$$3. (1+i)(1-2i)$$

$$4. \frac{1-i}{3+2i} + 2 \frac{1+3i}{2-3i}$$

2 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$A = (2+i)(1-i)^2$$

$$B = \frac{1+2i}{1-i}$$

$$C = \frac{3+2i}{1+i} - \frac{1-2i}{1-i}$$

$$D = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$$

3 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe complexe z vérifiant l'équation :

$$a) |z+i| = 0$$

$$b) |z-2+i| = \frac{1}{2}$$

$$c) |2z+1-i| = 3.$$

4 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$\left| \frac{z-1}{z+3} \right| = 1.$$

5 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z où z vérifie l'équation donnée :

$$a) \operatorname{Re}(z+1) = 0$$

$$b) |z| = 2$$

$$c) |z+1| = |z|.$$

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $(E) : z - 2\bar{z} + 2 = 0.$

7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $(E) : 2\bar{z} - 2 + 6i = z.$

8 Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $c+id \neq 0$. On pose :

$$z = \frac{a+ib}{c+id}.$$

1. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que z soit un nombre réel.

2. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que z soit imaginaire pur.

9 Soient z et z' deux nombres complexes. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses? Le démontrer.

A_1 : Si $z - \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.

A_2 : Si $|z| = 1$ et que $|z+z'| = 1$ alors $z' = 0$.

A_3 : Si $\operatorname{Im}(z+z') = 0$ alors z et z' sont conjugués.

A_4 : Si z est sur le cercle trigonométrique alors $1/z$ l'est aussi.

10 Écrire sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle le nombre complexe :

$$\chi = \frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}.$$

11 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}, \quad z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{2-2i}, \quad \text{et} \quad z_3 = (1-i)^6.$$

12 On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1-i.$$

1. Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2$ et de $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

13 Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\sin(2x)\cos(3x)$, | 3. $\cos^3 x + 2\cos^2 x$, |
| 2. $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$, | 4. $\sin^2(3x) + \cos^2(2x)$. |

14 Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Écrire $\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ sous forme algébrique.

15 Soit $n \in \mathbb{N}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur l'entier n le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est-il réel ?

2. Résolutions d'équations à variable complexe

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $z^2 + z + 1 = 0$, | 5. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, |
| 2. $z^6 + z^3 + 1 = 0$, | 6. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$, |
| 3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$, | 7. $2z^4 - (2 + i)z^2 + 1 - i = 0$, |
| 4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$, | 8. $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$ |

17 Déterminer les racines

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. carrées de $11 + 4i\sqrt{3}$, | 3. sixièmes de -27 , |
| 2. cubiques de $8i$, | 4. cubiques de $4(\sqrt{3} - i)$. |

18 On considère l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : Z^2 - 2iZ - 2 = 0.$$

- Résoudre (E) .
- Soit z un nombre complexe écrit sous forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b des nombres réels. Déterminer le module et un argument de e^z .
- En déduire les solutions de l'équation (S) ci-dessous d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(S) : e^{2z} - 2ie^z - 2 = 0.$$

19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $e^z = 1$, | 4. $e^z - 2e^{-z} + 2 = 0$, |
| 2. $e^z = 2i$, | 5. $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$, |
| 3. $e^z = \sqrt{3} + 3i$, | 6. $e^z = -1$. |

20 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

- Calculer la somme et le produit des n racines n -ièmes de l'unité.
- En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

21 Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et ω une racine n -ième de l'unité telle que $\omega \neq 1$. On pose :

$$S = \sum_{k=1}^n k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1 - \omega)S$, déterminer la valeur de S .

3. Pour approfondir

22 1. Déterminer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique.

2. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle.

3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ d'inconnue z .
- Démontrer que cette équation admet exactement $n - 1$ solutions, toutes réelles.

24 *Médian 2011.* 1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$ d'inconnue Z .

(b) Dédurre de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

(b) Prouver que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle que l'on déterminera.

3. (a) Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

(b) Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}.$$

(c) En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

(d) Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

4. Pour travailler seul

25 1. Soient z et z' deux nombres complexes. Démontrer l'équivalence :

$$z^2 = (z')^2 \iff z = z' \text{ ou } z = -z'.$$

2. (a) On considère le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Calculer z^2 et l'exprimer sous forme algébrique.

(b) Déterminer la forme algébrique de $(e^{i\pi/8})^2$.

3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

26 En utilisant l'écriture algébrique des nombres complexes, déterminer l'ensemble des points M d'affixe complexe z tels que $|z| = 2|z - i|$.

27 Représenter l'ensemble des points M d'affixe complexe z vérifiant l'équation :

$$|z + 2| = 1.$$

28 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = \frac{(1+i)^{12}}{(1-i)^8} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(-1+i)^9}{(1+i)^{15}}.$$

S'exprimer et raisonner en mathématiques

1. Les essentiels

29 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. f ne prend que des valeurs positives | 6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts |
| 2. f s'annule | 7. f est la fonction nulle |
| 3. f est majorée | 8. f s'annule une seule fois |
| 4. f est bornée | 9. f est paire |
| 5. f n'est pas la fonction nulle | 10. f atteint toutes les valeurs de l'ensemble $\mathbb{N}$. |

30 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I . Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$ | 5. $\forall x \in I, f(x) \leq 0$ |
| 2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$ | 6. $\forall a > 0, \exists x \in I, f(x) = a$ |
| 3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$ | 7. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) + M = 0$ |
| 4. $\forall x \in I, (f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0)$ | 8. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$ |

31 Écrire, sans justification, la négation des assertions suivantes :

- $(P_1) : \forall \varepsilon > 0, \exists M \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, \left(x \geq M \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon\right).$
 $(P_2) : \forall a \in \mathbb{R}, (a = 0 \text{ ou } a \neq 0).$

32 Étant données P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant les tables de vérité que :

$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \equiv (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R).$$

33 Soient P et Q deux assertions. À l'aide de tables de vérité, simplifier les assertions :

1. $(P \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow Q)$ | 2. $Q \text{ et } (Q \Rightarrow P).$

34 Soient P et Q deux assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifier que l'assertion $[(P \Rightarrow \text{non}(Q)) \text{ et } Q]$ et l'assertion $[\text{non}(P) \text{ et } Q]$ sont synonymes.

35 1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

2. On se donne deux nombres réels a et b . On considère l'implication $(\star)$ suivante :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$

- (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
 (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
 (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
 (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

36 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les assertions suivantes :

$\mathcal{P} : \ll f \text{ est une fonction affine} \gg$

$$\mathcal{Q} : \exists a \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = a(x - y).$$

1. L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est-elle vraie ? Justifier.
 2. La réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est-elle vraie ? Justifier.
 3. Que peut-on en déduire ?

2. Pour approfondir

37 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , l'entier $n^2 + n$ est pair.

38 Soit a un nombre réel vérifiant : $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$. Démontrer que $a = 0$.

39 On cherche à démontrer par analyse-synthèse que les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $(*) \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(m)f(n)$, et n'étant pas la fonction nulle sont exactement les fonctions $f_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $a \in \mathbb{N}$.

$$n \mapsto a^n$$

1. **Analyse.** On suppose que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifie $(*)$ et que f n'est pas la fonction nulle.

(a) Démontrer que $f(0) = 1$.

(b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1)^n$.

2. Il existe donc un entier $a \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_a$ (cet entier a étant $f(1)$). L'étape d'analyse est alors achevée. Rédiger maintenant l'étape de **synthèse** et **conclure**.

40 On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

- On suppose qu'une telle fonction f existe. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $f(0) = 1$.
- En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x .
- Conclure en raisonnant par analyse-synthèse.

3. Pour travailler seul

41 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

- $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$,
- $\forall x \in I, (f(x) = 0 \implies x = 0)$,
- $\forall x \in I, \forall y \in I, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$,
- dans le cas où $I = \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x)$.

42 On considère l'assertion (P) : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 5 \implies x \geq \sqrt{5})$. Écrire la négation de (P). L'assertion (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

43 1. Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que l'assertion suivante est une tautologie :

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q))$$

En déduire la négation de l'assertion suivante : «La fonction f est injective et surjective».

2. Démontrer que l'assertion suivante est une tautologie :

$$((\text{non}(P) \implies Q) \text{ et } \text{non}(Q)) \implies P.$$

À quel raisonnement correspond ce résultat ?

44 « Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. Je ne mange pas de pop corn. » Que peut-on en déduire ?

- | | |
|--|--|
| ☐ Je dors. | ☐ Je vais au cinéma et je dors. |
| ☐ Je ne dors pas. | ☐ Je ne porte pas mes lunettes |
| ☐ Je ne vais pas au cinéma. | ☐ et je ne vais pas au cinéma. |
| ☐ Je ne porte pas mes lunettes. | |

45 Les phrases suivantes signifient-elles $A \implies B$ ou $B \implies A$?

- Si A , alors B .
- Pour que A , il faut que B .
- Pour que A , il suffit que B .
- A est une condition suffisante pour B .
- A est une condition nécessaire pour B .
- A dès que B .
- A est faux si B l'est.

Trigonométrie et compléments de calcul algébrique

1. Équations et inéquations

46 Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;2]$.

47 Démontrer que, pour tous réels x et y on a : $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

$$(E_1): |x| = -5 \quad \mid \quad (E_2): |x^2 - 1| = 2.$$

49 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = [x] + (x - [x])^2$.

- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, [x + 1] = [x] + 1$.
- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = 1 + f(x)$.
- Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

50 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

$$(E_1): |x - 5| = 2|x + 5| \quad \mid \quad (E_3): x + |x - 1| = 1 + |x|$$

$$(E_2): |2 - x| + |2x - 1| = 2 \quad \mid \quad (E_4): 2x^2 + |x - 1| = |x + 1|.$$

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

$$1. \frac{x}{x-4} \geq \frac{1}{x+5} \quad \mid \quad 4. |x-2| + |x-1| < 3$$

$$2. x^3 + 5x \leq 6x^2 \quad \mid \quad 5. |1 - 2x^2| \geq 3$$

$$3. |5 - x| \leq 2 \quad \mid \quad 6. x^2 + |x - 1| - |2x + 1| < 0$$

52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |x - 2|$
- $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 2$
- $\sqrt{1 - x^2} \leq m - x$ où $m \in \mathbb{R}$.

53 Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{m+x} - \sqrt{1+x} = 1$ d'inconnue x .

54 1. Démontrer que :

$$(a) \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

$$(b) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x|} \quad \text{et} \quad \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|x|} \geq \sqrt{|y|}.$$

2. En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{|x-y|} \geq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y||}$.

2. Trigonométrie

55 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes d'inconnue x et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$	5. $2 \cos x = \sqrt{3}$
2. $2 \sin^2 x = 1$	6. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$
3. $\sin^2 x + 3 \cos x + \frac{3}{4} = 0$	7. $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$
4. $\sin(2x) = \cos(x)$.	8. $\tan(x) = \sqrt{3}$.

56 Résoudre dans $[0; 2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2 \sin x \leq \sqrt{3}, \quad 1 + 2 \sin x \geq 0, \quad 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 > 0.$$

57 Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ les inéquations suivantes :

$$2 \cos(x) \geq 1, \quad |\sin(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos^2 x > 1.$$

58 1. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ d'inconnue x .

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'inconnue x .

3. Produits et sommes

59 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5,$$

$$B_n = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n),$$

$$C_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n,$$

$$D = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) \left(1 - \frac{1}{3^5}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{3^{101}}\right).$$

60 1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

En déduire pour $n \geq 2$, la somme : $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)$.

2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.

61 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) ;$	3. $\sum_{i=0}^n \frac{2^i}{3^{2i-1}} ;$	5. $\sum_{k=n}^{2n} (3k-2).$
2. $\sum_{k=0}^n 2^{2k} ;$	4. $\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{3}{5^k}\right) ;$	

62 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k} ;$	3. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) ;$	5. $\prod_{\substack{k=2 \\ \text{où } n \geq 2}}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$
2. $\sum_{k=0}^{2n} k-n ;$	4. $\prod_{j=1}^n x^j \text{ où } x \in \mathbb{R} ;$	

63 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ , $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.

2. Calculer la somme : $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$.

3. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

64 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}. \text{ Calculer alors } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

65 1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3 - k^3$.

2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la somme : $\sum_{k=1}^n k^2$.

3. Calculer : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)$.

66 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

67 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{j=1}^{2n} 3^j \binom{2n}{j}.$$

68 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$.

69 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

70 Exprimer, pour θ un nombre réel quelconque, $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

71 Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. L'objectif de cet exercice est de calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

1. (a) Démontrer que pour tout entier naturel $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire que pour tout nombre complexe z , on a :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} z^k = n z (1+z)^{n-1}.$$

2. On note $\omega = e^{i\theta}$.

(a) Démontrer que $1 + \omega = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

(b) En déduire la forme exponentielle de $n \omega (1 + \omega)^{n-1}$.

(c) Donner alors la forme algébrique de $n \omega (1 + \omega)^{n-1}$.

3. À l'aide de l'égalité de la question 1(b), calculer S_n .

72 Démontrer que :

$$1. \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$2. \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

4. Pour travailler seul

73 Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie entière de x . Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[x+n] = [x] + n$.

74 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

75 Soit $x \in [0, \pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

76 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1},$$

$$B_n(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 1024x^{10},$$

$$C_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n,$$

$$D_n = (2+3^2) \times (2+3^4) \times (2+3^6) \times \dots \times (2+3^{84}).$$

77 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 1. \sum_{k=0}^{n-1} (3k+2) ; & \left| \right. & 3. \sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i+2}} ; \\ 2. \sum_{k=0}^n 3^{2k} ; & \left| \right. & 4. \sum_{k=1}^n \left(2k - \frac{5}{7^k} \right) ; \\ & & 5. \sum_{k=n}^{2n} (2k-3). \end{array}$$

78 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n .

Suites réelles

1. Les essentiels

79 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n.$$

On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$ et $b_n = 2^n u_n$.

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0 . Exprimer a_n en fonction de n .
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0 . Exprimer b_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

80 On pose $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n}$.

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier n .
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n}$.
 - (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n .
 - (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n .

81 1. Soit a et b deux constantes réelles. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ d'inconnue x admet au moins une solution c . Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - c u_n$ est géométrique de raison $a - c$.

2. On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0; & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

- (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$.
On notera Φ la solution positive et φ la solution négative.
- (b) En utilisant la première question, exprimer F_n en fonction de n , de Φ et de φ .
- (c) Déterminer la limite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

82 On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ .
2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5} .

83 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

84 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| 1. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$ | 3. $u_n = e^{1-n}$ | 6. $u_n = n + 5 \cos n$ |
| 2. $u_n = \frac{2n+3}{3n-5}$ | 4. $u_n = 5n + 7 - n^2$ | 7. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ |
| | 5. $u_n = n - \ln n$ | 8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |

85 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| 1. $u_n = \frac{2^n}{3^n}$ | 3. $u_n = n - \exp(n)$ | 6. $u_n = \frac{2n^5}{n!}$ |
| 2. $u_n = \frac{2n^2+3n}{n^2-n+2}$ | 4. $u_n = 2 \sin(n) - n$ | 7. $u_n = \frac{n!}{3^n}$ |
| | 5. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ | |

- 86** Démontrer les relations de négligeabilité suivantes :

$$n! \ll n^n \ll (2n)!.$$

- 87** Classer par ordre croissant pour la relation « est négligeable devant » :

$$n^n, \quad e^{2n}, \quad n!, \quad n \ln(n).$$

- 88** Démontrer les relations ci-dessous au voisinage de $+\infty$:

$$n^3 + 3n \sim n^3, \quad n - \ln(n) \sim n, \quad 3 \ln(n) \not\sim \ln(n), \quad n^{24} + 4 \ln(n) = o(e^n).$$

- 89** Démontrer les relations ci-dessous au voisinage de $+\infty$:

$$2n^2 - n \sim 2n^2, \quad \exp(2n) + n^3 + n! \sim n!, \quad 2n^2 \not\sim n^2.$$

- 90** On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

- 91** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

- 92** On considère la suite définie par son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser la valeur de sa limite.

- 93** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+1}$.
2. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

2. Pour approfondir

- 94** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + \pi. \end{cases}$$

1. Soit α un nombre réel. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 95** Soit $(s_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

- 96** *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq \ln n + \frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \leq 1 + \ln n$. *Indication* : $H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$

- (a) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
- (b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

3. Pour travailler seul

97 Quelle est la raison d'une suite géométrique $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = 150 ?$$

98 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

- (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
(b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

99 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

- Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- Déterminer un entier p tel que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près.
- Reproduire et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice :

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5		
10		
15		

- Déduire de ce tableau une valeur décimale approchée de ℓ aussi précise que possible. On indiquera la précision de cette approximation.

100 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Que pensez-vous des assertions suivantes :

- Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ .
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, il en est de même pour (u_n) .
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, de même limite ℓ , il en est de même pour (u_n) .

101 *Médian 2014.* 1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

- Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
- En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

- Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :
$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1. \end{cases}$$

On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

- Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq b_n < 0.$$

- En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n .
- Démontrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Démontrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- Démontrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k$$

est convergente.

Ensembles et applications

1. Les essentiels

102 On considère l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. Peut-on écrire

- | | | |
|------------------------|---------------------------------|---|
| 1. $a \subset E$? | 4. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$? | 7. $\{\emptyset\} \subset E$? |
| 2. $a \in E$? | 5. $\emptyset \subset E$? | 8. $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$? |
| 3. $\{a\} \subset E$? | 6. $\emptyset \in E$? | 9. $\{a\} \in E$? |

103 On considère les quatre parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k\} \quad B = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 12k\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 15k\} \quad D = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 100\}$$

- Définir chaque ensemble précédent à l'aide d'une phrase en français.
- Donner la liste des éléments de $B \cap D$.
- Déterminer $A \cup B \cup C$.
- Déterminer $A \cap B \cap C$ et donner la liste des éléments de $D \cap B \cap C$

104 *Final 2024.* Soit E un ensemble quelconque. Pour toutes parties A et B de E , on définit $A \nabla B$ par :

$$A \nabla B = \overline{A \cup B}.$$

- Soit A une partie de E . Simplifier les ensembles $A \nabla \emptyset$, $A \nabla A$ et $A \nabla \overline{A}$.
- Pour deux parties A et B de E , simplifier l'ensemble $(A \nabla A) \nabla (B \nabla B)$.
- Dans cette question, on suppose que :

$$E = \mathbb{R}, \quad A = \{x \in \mathbb{R}; |x+3| \leq 2\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}; |x| = -6\}.$$

Exprimer $A \nabla B$ sous la forme d'une réunion d'intervalles.

105 Étant données A , B et C trois parties d'un ensemble E , démontrer les équivalences suivantes :

$$1. A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C \quad 2. A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

106 Un sondage effectué auprès de 150 individus a donné les résultats suivants :

- À la question «consommez-vous régulièrement des légumes ?», 50 individus répondent oui.
- À la question «êtes-vous sportif ?», 80 individus répondent oui.
- À la question «êtes-vous un sportif qui consomme régulièrement des légumes ?», 35 personnes répondent oui.

Parmi les individus interrogés, combien ne sont pas sportifs et ne consomment pas régulièrement des légumes ?

107 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

- Pour toutes parties A et B d'un ensemble E , $A \cup (A \cap B) = \dots$

$$(a) A \quad | \quad (b) B \quad | \quad (c) A \cap B \quad | \quad (d) A \cup B$$

- On pose $I = \{x \in \mathbb{R}/x^2 < 4\}$. Alors $I \cap \mathbb{Z} = \dots$

$$(a) \{-1; 1\} \quad | \quad (b) \{0; 1; 2\} \quad | \quad (c) \{0; -1; 1\} \quad | \quad (d)]-2; 2[$$

- Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$ est égal à ...

$$(a) 2 \quad | \quad (b) 4 \quad | \quad (c) 8 \quad | \quad (d) 16$$

- Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

$$(a) 87^{100} \quad | \quad (b) \binom{100}{87} \quad | \quad (c) -87^{100} \quad | \quad (d) -\binom{100}{13}$$

- Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^*$. A et B sont deux parties de E , de cardinaux respectifs p et q tels que $1 \leq p \leq q \leq n$. On suppose que $A \subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A \subset X \subset B$?

$$(a) 2^q \quad | \quad (b) 2^q - 2^p \quad | \quad (c) 2^{q-p} \quad | \quad (d) \binom{q}{p}$$

108 Pour chacune des applications f ci-dessous, étudier la bijectivité de f et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

- | | |
|---|---|
| 1. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$
$z \mapsto z $ | 3. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [3, +\infty[$
$x \mapsto x^2 + 3$ |
| 2. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$x \mapsto \frac{1}{x-2} + 3$ | 4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ |

109 Pour chacune des applications f ci-dessous, étudier la bijectivité de f et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

- | | |
|---|---|
| 1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto n + 1$ | 4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (2x + y, x - 2y)$ |
| 2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
$n \mapsto n + 1$ | 5. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x, y^2)$ |
| 3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto 2n$ | 6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ |

110 Étudier si l'application f définie ci-dessous est bijective et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{3\}$$

$$z \mapsto 1 + \frac{2z}{z - i}.$$

111 *Final 2025.* On désigne par $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et on considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$A \mapsto A \cup \{0\}$$

Donner $\varphi(\mathbb{N})$ et $\varphi(\mathbb{N}^*)$. L'application φ est-elle bijective ?

112 On considère les applications f et g suivantes :

$$f : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[\quad \text{et} \quad g : [0; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{2} \quad \quad \quad x \mapsto 1 + 4x^2.$$

1. Calculer $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.
2. Calculer $(g \circ f)(x)$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.
3. Que peut-on en déduire ?

113 1. Déterminer $f(\mathbb{R})$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{it}$.
 2. On note $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on considère l'application g suivante :

$$g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z + \frac{1}{z}.$$

Déterminer $g(\mathbb{U})$.

114 1. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$ où f est l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x.$$

2. Déterminer $g([-1; 4])$ où g est l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2.$$

115 Déterminer les ensembles $f([1, +\infty[)$ et $f^{-1}([-1, 0])$ où f est l'application :

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x).$$

116 Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{2; 3\})$ de l'ensemble $\{2; 3\}$ par l'application f suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto [x].$$

117 Déterminer $f^{-1}([-1, 8])$ où f est l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2.$$

2. Pour approfondir

118 Soient E un ensemble et f une application définie sur $\mathcal{P}(E)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties X et Y disjointes de E ,

$$(\star) \quad f(X \cup Y) = f(X) + f(Y).$$

- Démontrer que $f(\emptyset) = 0$.
- Démontrer que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
- Soient A et B deux parties quelconques de E .
 - Écrire $A \cup B$ comme la réunion de deux parties disjointes de E .
 - Démontrer que :

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

119 On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}$:

$$E = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}.$$

- Démontrer que : si $z \in E$ alors $|z - i|^2 < |z + i|^2$.
- En déduire que : $\forall z \in E, \frac{z - i}{z + i} \in D$.
- Démontrer que pour tout nombre complexe Z , on a :

$$\operatorname{Im}(iZ) = \operatorname{Re}(Z) = \frac{Z + \overline{Z}}{2}.$$

- On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow D \\ z &\mapsto \frac{z - i}{z + i}. \end{aligned}$$

Démontrer que f est bijective.

120 On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$z \mapsto \frac{2}{(z-1)^2}.$$

- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = \frac{1}{4-3i}$.
- Démontrer que $f(E) = \mathbb{C}^*$. On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha \in \mathbb{C}^*$ par f .
- Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 2\pi$.
 - Démontrer que $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.
 - En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(e^{i\theta})$.
- On considère l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 1\}$. Démontrer que

$$f(\Delta \setminus \{1\}) =]-\infty, 0[.$$

121 On définit l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{où } z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction $\exp$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\exp(z) = \alpha$.
- En déduire que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

3. Pour travailler seul

122 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E . Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

123 Étant données A et B deux parties d'un ensemble E , démontrer les équivalences suivantes :

$$1. A \subset B \iff A \cup B = B \quad \Bigg| \quad 2. A = B \iff A \cap B = A \cup B$$

124 On considère deux applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. g est-elle bijective ?
3. Déterminer $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

125 Étudier si les applications suivantes sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques le cas échéant.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$
2. $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,
 $z \mapsto \sqrt{2}\bar{z} + iz$
3. $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 $X \mapsto \{1; 2; 3\} \cup X$

126 *Final 2017.* Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective.

Limites et continuité

1. Les essentiels

127 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \mapsto \dots$

$$1. x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2. \frac{x - \ln x}{x}$$

$$3. \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$4. \frac{\sin(\sqrt{5}x)}{x}$$

$$5. \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$6. \frac{\cos x}{x^2}$$

$$7. \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$8. \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

128 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$$

129 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote en $+\infty$ et étudier sa position locale au voisinage de $+\infty$ par rapport à cette asymptote.

$$1. f(x) = \frac{\ln(x) + 1 - x}{x + x^2}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1+x^2} - x$$

$$3. f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{5x}$$

$$4. f(x) = -xe^{-x} + 1 - 3x$$

130 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) - \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= \ln(2) + 2x - \ln(1 + e^{2x}). \end{aligned}$$

2. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

131 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \sin(x)$.

1. Proposer une suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(u_n))_n$ tende vers $+\infty$.

2. Proposer une suite $(w_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(w_n))_n$ converge vers 0.

3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Justifier.

132 Démontrer les équivalents ci-dessous entre fonctions.

$$1. \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$$

$$2. \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$3. \sin(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$4. \frac{\sqrt{x} - e^x + 2x^{22}}{\sqrt{x} \ln(x) - \sqrt{x} + x + 18} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{e^x}{x}.$$

133 1. Démontrer l'équivalent suivant au voisinage de 0 : $\sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\frac{1}{4}}$.

2. Déterminer un équivalent de la fonction $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

134 Soit $k \in \mathbb{R}, k$ fixé. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1, \\ -2x + k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

135 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b .

136 Étudier la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

137 Dans chaque cas, étudier si la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0.

1. $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$	3. $f : x \mapsto \frac{e^{2\sin x} - 1}{x}$
2. $f : x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	4. $f : x \mapsto \frac{ \sin(x) }{x}$

138 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $x^5 - x^4 + 1 = 0$ dans $I = [-1; 0[$,	3. $e^x = 2 - x$ dans $\mathbb{R}$,
2. $\tan x = x + 1$ dans $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,	4. $\sin(x) + 1 = x$ dans $I =]\frac{\pi}{2}; \pi[$.

139 Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$. Démontrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.

Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

2. Pour approfondir

140 Soit x un nombre réel strictement positif. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

141 Étudier la limite éventuelle lorsque x tend vers 1 de : $\frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln x}$.

142 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est bornée sur $[2; +\infty[$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

143 L'équation $x^5 = 5x - 1$ admet-elle des solutions réelles ? Si oui, combien ?

144 Final 2024. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = (x+1)e^{nx}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la limite de la fonction f_n en $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, +\infty[$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation d'inconnue x , $f_n(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n .
(b) Déterminer la valeur exacte de u_1 .
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'écriture du nombre $f_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
(b) Prouver que pour tout entier naturel non nul n ,

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En partant de l'égalité $f_n(u_n) = n$, démontrer que

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(1+u_n)}{n}.$$

- (b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

145 1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}$.

2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

146 *Final 2025.* On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - 4x + 2.$$

1. Démontrer que $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$.

2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f . Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera l'équation.

3. Pour travailler seul

147 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

148 Étudier si les fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}^*$ sont prolongeables par continuité en 0.

1. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2. $g(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$.

149 Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f ci-dessous admet en $+\infty$ une asymptote dont on précisera l'équation.

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln(x) - 1}{\sqrt{x}} + 3x.$$

150 Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f ci-dessous admet en $-\infty$ une asymptote dont on précisera l'équation.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{4x^3 - 3x^2}{x^2 - 8} + 1.$$

151 *Final 2012.* 1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 10 \ln(1+x) + x^2 + 2x - 10.$$

2. Démontrer que g bijective de $] -1, +\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.

3. En déduire que l'équation $10 \ln(1+x) + x^2 + 2x - 10 = 0$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.

4. On définit la fonction f par : $f(x) = \frac{x^2 - 10 \ln(1+x)}{1+x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .

5. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

6. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

Polynômes

1. Les essentiels

- 152** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.
- 153** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
On raisonne par analyse/synthèse. Si un tel polynôme P existe, on donnera son degré et on calculera $P(1)$ et $P(i^2)$.
- 154** Effectuer les divisions euclidiennes de
- $X^4 + X^2 + X + 2$ par $X^2 - 3$
 - $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$
 - $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
 - $4X^3 + 2iX^2$ par $X + i$.
- 155** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :
- $X + 3$
 - $X^2 - 6X - 16$
 - $(X + 3)^2(X + 2)$.
- 156** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne :
- du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$
 - du polynôme $X^n + nX + 1$ par le polynôme $X^2 - 3X + 2$
 - du polynôme $(\cos(\theta)X + \sin(\theta))^n$ par le polynôme $X^2 + 1$.
- 157** Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X + \sqrt{3})^{2025}$ par $X^2 + 1$.
- 158** Déterminer deux réels a et b pour que $aX^{25} + bX^{24} + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$.
- 159** Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

- | | | |
|-------------------|--------------|----------------------|
| 1. $4X^2 - X - 3$ | 3. $X^6 + 1$ | 5. $X^2 + X + 1$ |
| 2. $X^3 - 8$ | 4. $X^7 - 1$ | 6. $X^4 + X^2 + 1$. |

2. Pour approfondir

- 160** *Final 2018.* Le but de cet exercice est de prouver que la fonction $\exp$ définie sur $\mathbb{C}$ par la relation ci-dessous n'est pas polynomiale.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} [\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))]$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$.
- Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
- Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines?
- Démontrer que la fonction $\exp$ n'est pas une fonction polynomiale.

- 161** *Médian 2010.* Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P = (1 + X)^n - X^n.$$

- Quel est le degré de P ? Donner son coefficient dominant.
- Démontrer que si z est une racine de P alors $\Re(z) = -\frac{1}{2}$
- (a) Démontrer que, pour tout réel x ,

$$e^{ix} - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$
- (b) Déterminer les racines de P . On les exprimera en fonction des racines n -ièmes de l'unité.
- (c) Écrire chaque racine de P sous forme exponentielle. En déduire le module et un argument de chacune de ces racines.

- On note $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ les racines du polynôme P . Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de l'entier $n \geq 2$, l'équation ci-dessous d'inconnue x :

$$(1+x)^n = x^n.$$

162 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme $P = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

163 Final 2025. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit le polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n - 1.$$

- Calculer son polynôme dérivé $P'_n(X)$ sous forme factorisée.
- Soit α une racine complexe de $P_n(X)$.
Prouver en raisonnant par l'absurde, que α est de multiplicité 1.
- (a) Démontrer que l'équation $P_n(t) = 0$, d'inconnue t , admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On notera u_n cette solution.
(b) Vérifier que $1 < u_n < 2$.
- (a) On rappelle que u_n est racine de $P_n(X)$. Vérifier que $u_n^n(nu_n - n - 1) = 1$.
(b) En déduire que $nu_n - n - 1 \leq 1$ puis un encadrement de u_n
(c) Établir la convergence et déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$
- Dans cette question uniquement, on prendra $n = 2$.
On pose $P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 1$.
(a) On admet que le polynôme $P(X)$ admet une seule racine réelle $a = u_2$ et deux racines complexes conjuguées b et $c = \bar{b}$. Donner les valeurs exactes de $a + b + c$ et abc .
(b) Déduire de l'encadrement de 3(b) et de la valeur de abc , que $\frac{1}{2} < |b| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

164 Final 2012. Pour tout entier naturel n non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

- Calculer son polynôme dérivé $P'_n(X)$.
- Démontrer que 1 est la seule racine multiple de $P_n(X)$.
- On considère la fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) En identifiant $f(x)$ comme étant la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique, calculer de deux façons différentes $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

(b) En déduire le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par le polynôme $(X-1)^2$.

4. On note $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P_4(X)$ par $(X-1)^2$ et on désigne par a, b et c les racines complexes du polynôme $Q(X)$.

(a) Factoriser $Q(X)$ en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Calculer la somme :

$$\sigma = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}.$$

165 1. Déterminer les racines cubiques de -1 c'est-à-dire les solutions de l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^3 = -1$$

2. On note ω la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive.

(a) Vérifier que $\omega + \bar{\omega} = 1$.

(b) Démontrer que ω et $\bar{\omega}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

3. Soient n un entier naturel non nul fixé, et le polynôme

$$P(X) = X^{2n} - (X-1)^n + X^n + 1$$

(a) On admet que $P(\bar{\omega}) = \overline{P(\omega)}$

Démontrer que P est divisible par $X^2 - X + 1$ si, et seulement si, $P(\omega) = 0$.

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polynôme P soit divisible par $X^2 - X + 1$. On rappelle, d'après 2(b), que $\omega - 1 = \omega^2$.

4. En utilisant l'écriture algébrique de $P(\omega)$, déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$.

166 Soient p et q deux entiers naturels. Obtenir une relation entre coefficients binomiaux à l'aide de l'égalité : $(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$.

167 1. Soit $P = X^2 - 4X + 5$. Décomposer le polynôme P en produits facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On considère le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = X^3 - (1 + 2i)X^2 - 3X - 1 + 2i.$$

- Démontrer que Q a une racine en commun avec P .
- Effectuer la division euclidienne de Q par $X - \alpha$ où α est la racine commune à P et Q trouvée à la question précédente.
- En déduire la décomposition de Q en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Pour travailler seul

168 On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$. On pose $u = 1 + e^{i\theta}$

- Écrire $1 + e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
- Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + (2 + 2\cos\theta) = 0.$$

En déduire la seconde solution de cette équation.

169 Soit n un entier, $n \geq 2$. On pose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- En déduire la factorisation de $P(z)$.
- En calculant $P(1)$, prouver que : $\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = n$.
- En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

170 Final 2016. Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n .

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| \geq |\operatorname{Im}(z)|$.
- On suppose dans cette question que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P , démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.
- On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.
 - Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
 - Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\operatorname{Im}(z_0)|^3$.
- On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$. Démontrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

171 Final 2019. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme :

$$P_n(X) = X^n - (X - 1)^n.$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_n(z) = 0$ d'inconnue z . On exprimera les solutions en fonction des racines n -ièmes de l'unité.
- Vérifier que, pour tout réel θ , $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- Déterminer les écritures exponentielles des racines complexes du polynôme $P_n(X)$.

172 Final 2014. On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée α ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer α .

- Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$?
- En déduire que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine double de P .
- Montrer que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$P(X) = (X - \alpha)^2 (X - \bar{\alpha})^2.$$

- En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
- Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
- Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer α .

Dérivabilité

1. Les essentiels

173 Dans chacun des cas suivants :

- préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable et calculer f' ,
- déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

$$1. f : x \mapsto \ln(\ln x), \text{ où } a = e$$

$$2. f : x \mapsto \sqrt{5 + \sin x}, \text{ où } a = 0$$

$$3. f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ où } a = 0$$

$$4. f : x \mapsto \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ où } a = 0$$

$$5. f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \text{ où } a = 1$$

$$6. f : x \mapsto x^x, \text{ où } a = 1.$$

174 Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f (en ayant déterminé les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f).

$$1. f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$$

$$2. f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$$

$$3. f : x \mapsto \frac{e^x}{(x+1)^2}$$

$$4. f : x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}.$$

175 Calculer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto e^{5x}$$

$$2. g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

$$3. h : x \mapsto xe^x$$

$$4. \varphi : x \mapsto \cos(2x).$$

176 Étudier la dérivabilité des fonctions f, g, h et u définies par :

- $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$,
- $g(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $g(1) = 1$,
- $h(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$,
- $u(x) = \frac{x}{1+|x|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

177 Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

178 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie comme suit sur $\mathbb{R}^+$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0; 1], \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

179 La fonction φ est définie sur $[1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [1; +\infty[$. Démontrer que φ est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ . Calculer $(\varphi^{-1})'\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

180 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x - 2$. Démontrer que f est bijective et calculer $(f^{-1})'(0)$.

181 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, -x \leq \sin x \leq x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(1+x) < x$;
3. $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

182 Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

183 Final 2024. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. (a) Démontrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
(b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
2. La fonction f' est-elle continue en 0? Justifier.
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1.$$

2. Pour approfondir

184 On considère la fonction dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$.
(b) En déduire le sens de variation de f , ainsi que les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
- (a) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
(b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner une expression simple de $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.

185 On considère la fonction g définie sur $]0, \pi]$ par :

$$\forall x \in]0, \pi], \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Justifier brièvement pourquoi la fonction g est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur en zéro de la fonction g ainsi prolongée.
- (a) Rappeler la monotonie de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$.
(b) On se fixe un réel $x \in]0, \pi]$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction sinus sur $[0, x]$ démontrer que :
$$x \cos(x) \leq \sin(x) \leq x.$$
- Justifier brièvement que g est dérivable sur $]0, \pi]$ et calculer sa dérivée en tout point de cet intervalle.
- (a) Étudier les variations de g sur $]0, \pi]$ à l'aide des questions précédentes.
(b) En déduire que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x).$$

5. (a) Rappeler, sans justification, la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\frac{x^2}{2}}$.

(b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$.

(c) En utilisant la définition de la dérivabilité en un point et la question 2(b), démontrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

6. (a) En utilisant la question 2(b), démontrer que :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \frac{\cos(x) - 1}{x} \leq g'(x) \leq 0.$$

(b) Étudier la continuité de g' en 0.

186 Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . On suppose que $f(I) \subset I$ et qu'il existe un réel $k \in [0, 1]$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k.$$

On considère une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

- Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur le segment I . On la notera α .
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$
- Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
- Application** : on définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$.
(a) Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variation.
(b) On pose $I = [\frac{1}{2}, 1]$. Prouver qu'il existe un réel $k \in [0, 1]$ tel que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq k$.
(c) Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

- 187** 1. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \tan x - x \leq x(\tan x)^2.$$

2. On considère la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Étudier la parité de f .
- Démontrer que f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
- Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

- 188** *Final 2017.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. En remarquant que pour tout réel x , $f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}\right)$, justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

- Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}$.
- Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[0, 1]$.
- On considère la suite de terme général $u_n = f_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Utiliser la question 3 pour démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 - En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

3. Pour travailler seul

- 189** 1. Démontrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

- 190** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Démontrer que : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Indication : considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

- 191** *Final 2014.* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Démontrer que f est continue en 0.
- Démontrer que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant : $e^x - 1 - x \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
- Démontrer que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
- La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - Déterminer l'équation de l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
 - Déterminer les positions relatives de Δ et de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $] -\infty, 0]$.
 - Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1.

Fonctions trigonométriques réciproques

192 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(1), \quad \arcsin(0).$$

193 Calculer :

$$\arccos(0), \quad \arccos(-1), \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arctan(\sqrt{3}), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

194 Soit $x \in [-1, 1]$.

- Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \quad \cos(2\arcsin(x)).$$

- Démontrer que :

$$(a) \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad | \quad (b) \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

195 Démontrer la formule ci-dessous :

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

196 Démontrer que pour tout réel x positif, $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

197 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad g : x \mapsto \arcsin x.$$

- Déterminer les domaines de définition de f et de g .
- Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
- En déduire une relation entre f et g .

198 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

- Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

199 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

200 Démontrer les formules ci-dessous :

- $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
- $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

201 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1, 0]$.

25

1. Soient z et z' deux nombres complexes.

$$\begin{aligned} z^2 = (z')^2 &\iff z^2 - (z')^2 = 0 \\ &\iff (z - z')(z + z') = 0 \\ &\iff z - z' = 0 \quad \text{ou} \quad z + z' = 0 \\ &\iff z = z' \quad \text{ou} \quad z = -z'. \end{aligned}$$

2. (a) Soit $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right) \left(i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) + \left(i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^2 + i 2 \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^2 + i 2 \frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}})}{4} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} + i \frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

(b) D'après la formule de Moivre, on a :

$$\left(e^{i\pi/8} \right)^2 = e^{i2\pi/8} = e^{i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. D'après les questions 2(a) et 2(b), on a :

$$\left(e^{i\pi/8} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^2.$$

Donc, d'après la question 1, on en déduit :

$$e^{i\pi/8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou} \quad e^{i\pi/8} = -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right),$$

c'est-à-dire, en identifiant parties réelles et parties imaginaires,

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}.$$

Or, $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0.$$

Par conséquent :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

26 Indications

- En écrivant z sous la forme $x+iy$ avec x et y des nombres réels, l'équation $|z| = 2|z-i|$ se réécrit sous la forme : $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$.
- Mettre sous forme canonique le polynôme du second degré $y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3}$.
- Rappel : pour tous nombres réels x_0 , y_0 et r avec $r > 0$, l'équation $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ est une équation cartésienne du cercle de centre le point de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon r .

Correction

Soient z un nombre complexe et M le point d'affixe z . Écrivons z sous la forme $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels. Alors :

$$\begin{aligned}
 |z| = 2|z - i| &\iff |x + iy| = 2|(x + iy) - i| \\
 &\iff \sqrt{x^2 + y^2} = 2|x + i(y - 1)| \\
 &\iff \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\
 &\iff x^2 + y^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \\
 &\iff x^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2 - 2y + 1) \\
 &\iff x^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \\
 &\iff 3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0 \\
 &\iff x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \\
 &\iff x^2 + y^2 - 2 \times y \times \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0 \\
 &\iff x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0 \\
 &\iff x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \\
 &\iff x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\
 &\iff x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.
 \end{aligned}$$

On reconnaît ici l'équation cartésienne du cercle de rayon $\frac{2}{3}$ et de centre A , point de coordonnées $(0, \frac{4}{3})$, c'est-à-dire d'affixe $z_A = i\frac{4}{3}$.

Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe z solution de l'équation $|z| = 2|z - i|$ est le cercle de centre A et de rayon $\frac{2}{3}$.

Variante de fin si on ne veut pas avoir recours à l'équation cartésienne d'un cercle :

On a démontré que :

$$|z| = 2|z - i| \iff x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
 x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 &\iff \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \\
 &\iff \left|x + i\left(y - \frac{4}{3}\right)\right| = \frac{2}{3} \\
 &\iff \left|(x + iy) - i\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} \\
 &\iff \left|z - i\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Soit A le point d'affixe $z_A = i\frac{4}{3}$. Alors,

$$\left|z - i\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} \iff |z - z_A| = \frac{2}{3} \iff AM = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent,

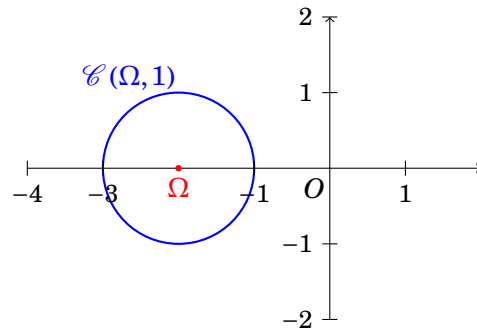
$$|z| = 2|z - i| \iff AM = \frac{2}{3} \iff M \in \mathcal{C}\left(A, \frac{2}{3}\right)$$

où $\mathcal{C}\left(A, \frac{2}{3}\right)$ est le cercle de centre A et de rayon $\frac{2}{3}$.

27 Soient z un nombre complexe et M le point d'affixe z . Soit Ω le point d'affixe $z_\Omega = -2$; c'est-à-dire le point du plan de coordonnées $(-2, 0)$. On a :

$$|z + 2| = 1 \iff |z - (-2)| = 1 \iff |z - z_\Omega| = 1 \iff \Omega M = 1 \iff M \in \mathcal{C}(\Omega, 1),$$

où $\mathcal{C}(\Omega, 1)$ est le cercle de centre Ω et de rayon 1. Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe complexe vérifiant l'équation $|z + 2| = 1$ est le cercle $\mathcal{C}(\Omega, 1)$ représenté en bleu sur le graphique suivant.



28 Soient $z_1 = \frac{(1+i)^{12}}{(1-i)^8}$ et $z_2 = \frac{(-1+i)^9}{(1+i)^{15}}$.

• Écrivons z_1 sous forme exponentielle.

◦ On a : $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

◦ De plus $1-i = \overline{1+i}$ donc :

$$1-i = \overline{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

◦ Ainsi,

$$z_1 = \frac{(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{12}}{(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})^8} = \frac{(\sqrt{2})^{12} (e^{i\frac{\pi}{4}})^{12}}{(\sqrt{2})^8 (e^{-i\frac{\pi}{4}})^8} = (\sqrt{2})^4 \frac{e^{i12\frac{\pi}{4}}}{e^{-i8\frac{\pi}{4}}} = 4 \frac{e^{i3\pi}}{e^{-i2\pi}} = 4e^{i3\pi},$$

puisque $e^{-i2\pi} = 1$. La forme exponentielle de z_1 est donc $4e^{i3\pi}$ (qui est aussi égal à $4e^{i\pi}$ et même à $e^{i5\pi}$ par exemple).

• Écrivons z_2 sous forme exponentielle.

◦ On a vu que :

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

◦ Or,

$$-1+i = -(1-i) = e^{i\pi} (1-i),$$

donc :

$$-1+i = e^{i\pi} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i(\pi-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

◦ D'où :

$$z_2 = \frac{(\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}})^9}{(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{15}} = \frac{(\sqrt{2})^9 (e^{i\frac{3\pi}{4}})^9}{(\sqrt{2})^{15} (e^{i\frac{\pi}{4}})^{15}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^6} \frac{e^{i9\frac{3\pi}{4}}}{e^{i15\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{8} \frac{e^{i\frac{27\pi}{4}}}{e^{i\frac{15\pi}{4}}} = \frac{1}{8} e^{i(\frac{27\pi}{4}-\frac{15\pi}{4})}.$$

Ainsi, la forme exponentielle de z_2 est $\frac{1}{8} e^{i3\pi}$ (qui est aussi égal à $\frac{1}{8} e^{i\pi}$).

35

1. • Négation : P et non(Q).
- Contraposée : non(Q) $\Rightarrow$ non(P).
2. (a) Oui car la fonction sinus est 2π -périodique.
- (b) $\sin(a) \neq \sin(b) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}, a \neq b + 2k\pi)$.
- (c) $(\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi)$ et $\sin(a) \neq \sin(b)$.
- (d) $\sin(a) = \sin(b) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi)$. Cette réciproque est fausse. En effet, en prenant $a = \pi/4$ et $b = \pi/4$ on a bien :

$$\sin(a) = \sin(b) \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}, a \neq b + 2k\pi.$$

41

1. $\left[\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C \right] \equiv \text{« } f \text{ est une fonction constante. »}$

2. Notons P l'assertion suivante :

$$P : \left[\forall x \in I, (f(x) = 0 \implies x = 0) \right].$$

Alors,

$$\begin{aligned} P &\equiv \text{« Si } f \text{ s'annule, alors c'est nécessairement en } 0 \text{ »} \\ &\equiv \left[\forall x \in I, (x \neq 0 \implies f(x) \neq 0) \right] \\ &\equiv \left[\forall x \in I \setminus \{0\}, f(x) \neq 0 \right] \\ &\equiv \text{« } f \text{ ne s'annule pas sur } I \setminus \{0\} \text{ »} \end{aligned}$$

3. $\left[\forall x \in I, \forall y \in I, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y)) \right] \equiv \text{« La fonction } f \text{ est croissante. »}$

4. $\left[\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x) \right] \equiv \text{« La fonction } f \text{ est } \pi\text{-périodique. »}$

42 On considère l'assertion

$$(P) : \left[\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 5 \implies x \geq \sqrt{5}) \right].$$

Alors :

$$\text{non}(P) \equiv \left[\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 5 \text{ et } x < \sqrt{5}) \right].$$

Posons, par exemple, $x = -3$. Alors : $x^2 \geq 5$ et $x < \sqrt{5}$.

Par conséquent, $\text{non}(P)$ est vraie. Autrement dit, l'assertion (P) est fausse.

43

1. **Il y a une erreur d'énoncé, à remplacer par “En déduire la négation de l'assertion suivante : «La fonction f est injective et surjective»”.**

Soient R et S deux assertions. On rappelle la table de vérité de l'équivalence $R \iff S$ qui consiste en l'assertion suivante : $(R \implies S)$ et $(S \implies R)$.

R	S	$R \implies S$	$S \implies R$	$R \iff S$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Pour simplifier les notations dans la table de vérité suivante, on notera la négation $\text{non}(A)$ d'une assertion A sous la forme $\overline{A}$.

Il s'agit alors de démontrer que l'assertion $\left[\overline{P \text{ et } Q} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}) \right]$ est une tautologie, c'est-à-dire qu'elle est toujours vraie, peu importent les valeurs de vérité des assertions P et Q .

À l'aide de la table de vérité de $R \iff S$ rappelée précédemment on peut dresser la table de vérité suivante :

P	Q	$P \text{ et } Q$	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$	$\overline{P \text{ et } Q} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Cela démontre bien que l'assertion $\left[\overline{P \text{ et } Q} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}) \right]$ est toujours vraie.

Notons maintenant P l'assertion « La fonction f est injective » et Q l'assertion « La fonction f est surjective ».

Puisque $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q))$, alors la négation de l'assertion « La fonction f est injective et surjective » est équivalente à « La fonction f n'est pas injective, ou la fonction f n'est pas surjective ».

2. Démontrons que l'assertion suivante est toujours vraie :

$$\left((\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } \text{non}(Q) \right) \Rightarrow P.$$

Pour simplifier, nous remplacerons par la lettre R l'assertion $(\text{non}(P) \Rightarrow Q)$ dans la table de vérité suivante.

P	Q	$\text{non}(P)$	R	$\text{non}(Q)$	$R \text{ et } \text{non}(Q)$	$(R \text{ et } \text{non}(Q)) \Rightarrow P$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

On remarque, d'après la dernière colonne de cette table de vérité, que l'assertion $(\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } \text{non}(Q) \Rightarrow P$ est toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité de l'assertion P et de l'assertion Q : c'est une tautologie. Ce résultat illustre le raisonnement par l'absurde.

44 On admet les affirmations suivantes : « Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. Je ne mange pas de pop corn. »

On introduit alors les notations qui suivent :

- C : « Je vais au cinéma. »
- L : « Je porte mes lunettes. »
- D : « Je dors. »
- P : « Je mange des pop corn. »

On peut donc traduire les affirmations données sous forme symbolique :

- « Je ne mange pas de pop corn. » $\equiv \text{non}(P)$
- « Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. »
 $\equiv [\text{non}(D) \Rightarrow P]$
 $\equiv [\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(\text{non}(D))] \quad \text{par contraposée}$
 $\equiv [\text{non}(P) \Rightarrow D]$
- « Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. »
 $\equiv [C \Rightarrow (L \text{ et } \text{non}(D))]$
 $\equiv [\text{non}(L \text{ et } \text{non}(D)) \Rightarrow \text{non}(C)] \quad \text{par contraposée}$
 $\equiv [(\text{non}(L) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(D))) \Rightarrow \text{non}(C)]$
 $\equiv [(\text{non}(L) \text{ ou } D) \Rightarrow \text{non}(C)]$

Ainsi les trois assertions

- $\text{non}(P)$
- $\text{non}(P) \Rightarrow D$
- $(\text{non}(L) \text{ ou } D) \Rightarrow \text{non}(C)$

sont vraies.

L'assertion $\text{non}(P)$ et l'implication $(\text{non}(P) \Rightarrow D)$ étant vraies, on en déduit que l'assertion D est vraie. D'où l'affirmation suivante : « Je dors. ». Puisque l'assertion D est vraie, alors l'assertion $(\text{non}(L) \text{ ou } D)$ l'est aussi. L'implication $[(\text{non}(L) \text{ ou } D) \Rightarrow \text{non}(C)]$ étant vraie, on en déduit que l'assertion $\text{non}(C)$ l'est également. Autrement dit, l'affirmation « Je ne vais au cinéma pas. » est vraie.

45

1. « Si A , alors B . » $\equiv [A \Rightarrow B]$.
2. « Pour que A , il faut que B . » $\equiv [A \Rightarrow B]$.
3. « Pour que A , il suffit que B . » $\equiv [B \Rightarrow A]$.
4. « A est une condition suffisante pour B . » $\equiv [A \Rightarrow B]$.
5. « A est une condition nécessaire pour B . » $\equiv [B \Rightarrow A]$.
6. « A dès que B . » $\equiv [B \Rightarrow A]$.
7. « A est faux si B l'est. » $\equiv [\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)] \equiv [A \Rightarrow B]$.

62 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifions $\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}$:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}} &= \sum_{k=n}^{2n} (\sqrt{3})^k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} (\sqrt{3})^k - \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt{3})^k \\
 &= \frac{1 - (\sqrt{3})^{2n+1}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1 - (\sqrt{3})^{(n-1)+1}}{1 - \sqrt{3}} \\
 &= \boxed{\frac{(\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3})^n}{\sqrt{3} - 1}}.
 \end{aligned}$$

2. Simplifions $\sum_{k=0}^{2n} |k - n|$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{2n} |k - n| &= \sum_{k=0}^n \underbrace{|k - n|}_{=-(k-n)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{|k - n|}_{=k-n} \\
 &\quad \text{car } k-n \leq 0 \quad \text{car } k-n > 0 \\
 &= \sum_{k=0}^n (-(k-n)) + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) \\
 &= -\sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n n + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) \\
 &= -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \times n + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n).
 \end{aligned}$$

Posons $p = k - n$ dans la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} (k - n)$:

$$\begin{cases} p = k - n \\ n+1 \leq k \leq 2n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - n \\ 1 \leq k - n \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - n \\ 1 \leq p \leq n. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (k - n) = \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n} |k - n|} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n(n+1)}.$$

3. Calculons $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k}.$$

Effectuons le changement de variable $p = k + 1$ dans le produit $\prod_{k=1}^n (k + 1)$:

$$\begin{cases} p = k + 1 \\ 1 \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k + 1 \\ 2 \leq k + 1 \leq n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = k + 1 \\ 2 \leq p \leq n + 1. \end{cases}$$

Alors

$$\prod_{k=1}^n (k + 1) = \prod_{p=2}^{n+1} p = \prod_{k=2}^{n+1} k.$$

Ainsi

$$\boxed{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\left(\prod_{k=2}^n k\right) \times (n+1)}{1 \times \left(\prod_{k=2}^n k\right)} = \boxed{n+1}.$$

$$4. \text{ Soit } x \in \mathbb{R}. \quad \boxed{\prod_{j=1}^n x^j} = x^{\sum_{j=1}^n j} = x^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ car } \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$5. \text{ On suppose que } n \geq 2. \text{ Simplifions } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k^2 - 1)}{\prod_{k=2}^n k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n ((k-1)(k+1))}{\prod_{k=2}^n k^2}.$$

D'où

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\left(\prod_{k=2}^n (k-1)\right) \left(\prod_{k=2}^n (k+1)\right)}{\left(\prod_{k=2}^n k\right)^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1)}{\prod_{k=2}^n k} \times \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k}.$$

Effectuons le changement de variable $p = k - 1$ dans $\prod_{k=2}^n (k - 1)$:

$$\begin{cases} p = k - 1 \\ 2 \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - 1 \\ 1 \leq k - 1 \leq n - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - 1 \\ 1 \leq p \leq n - 1. \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$\prod_{k=2}^n (k - 1) = \prod_{p=1}^{n-1} p = \prod_{k=1}^{n-1} k.$$

De la même façon, en effectuant le changement de variable $q = p + 1$ dans le produit $\prod_{k=2}^n (k + 1)$, on obtient :

$$\prod_{k=2}^n (k + 1) = \prod_{q=3}^{n+1} q = \prod_{k=3}^{n+1} k.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^n k} \times \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^n k} \\ &= \frac{1 \times \prod_{k=2}^{n-1} k}{\left(\prod_{k=2}^{n-1} k\right) \times n} \times \frac{\left(\prod_{k=3}^n k\right) \times (n+1)}{2 \times \left(\prod_{k=3}^n k\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \\ &= \boxed{\frac{n+1}{2n}}. \end{aligned}$$

73 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrons l'égalité : $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Posons $y = x + n$. Il s'agit de démontrer que $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. D'après la caractérisation de la partie entière, on sait que $\lfloor y \rfloor$ est l'unique entier $N \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$N \leq y < N + 1.$$

Cherchons donc à encadrer y par deux entiers consécutifs. On sait (toujours d'après la caractérisation de la partie entière) que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En ajoutant n à cet encadrement, on en déduit :

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + 1 + n.$$

Autrement dit, en posant $N = \lfloor x \rfloor + n$, on obtient l'encadrement suivant, puisque $y = x + n$:

$$N \leq y < N + 1.$$

Or, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $N = \lfloor x \rfloor + n$. Donc $N \in \mathbb{Z}$. $\lfloor y \rfloor$ étant l'unique entier N vérifiant l'encadrement ci-dessus, on en déduit : $\lfloor y \rfloor = N$, i.e.

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

74 • On remarque que :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{(4-3)\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}. \quad (\star) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}. \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

• Remarquons également l'égalité : $\frac{5\pi}{12} = \frac{(6-1)\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. On en déduit :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right). \end{cases}$$

Or, il est facile de vérifier (en s'aidant du cercle trigonométrique on en utilisant les formules de développement du sinus et du cosinus, voir la remarque à la fin de l'exercice pour une démonstration de ce résultat) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} & \text{d'après } (\star\star) \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} & \text{d'après } (\star) \\ \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}. \end{cases}$$

Remarque : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin(-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times \cos(x) + \sin(-x) \times 0 \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) \\ &= 0 \times \cos(-x) - 1 \times \sin(-x) \\ &= \sin(x). \end{aligned}$$

75 Soit $x \in [0, \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété :

$$|\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation. Puisque $\sin(0x) = \sin(0) = 0$ et $0 \times \sin(x) = 0$, $P(0)$ est vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\sin((n+1)x) = \sin(nx+x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx).$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)|.$$

Or,

$$\begin{aligned} |\sin(nx)\cos(x)| &= |\sin(nx)| |\cos(x)| \\ &\leq |\sin(nx)| \quad \text{car } -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ &\leq n \sin(x) \quad \text{d'après } P(n). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\sin(x)\cos(nx)| &= |\sin(x)| |\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(x)| \quad \text{car } -1 \leq \cos(nx) \leq 1. \end{aligned}$$

Or $x \in [0, \pi]$. Donc $\sin(x) \geq 0$. Par conséquent $|\sin(x)| = \sin(x)$ et

$$|\sin(x)\cos(nx)| \leq \sin(x).$$

Ainsi,

$$|\sin((n+1)x)| \leq n \sin(x) + \sin(x) = (n+1) \sin(x).$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

- Conclusion. $P(0)$ est vraie et la propriété P est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

76

$$A_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$$

$$B_n(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 1024x^{10} = \sum_{k=1}^{10} 2^k x^k = \sum_{k=1}^{10} (2x)^k$$

$$C_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k = n!$$

$$D_n = (2+3^2) \times (2+3^4) \times (2+3^6) \times \dots \times (2+3^{84}) = \prod_{k=1}^{42} (2+3^{2k}) = \prod_{k=1}^{42} (2+9^k).$$

77

1. Calculons $\sum_{k=0}^{n-1} (3k+2)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (3k+2) &= 3 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \\ &= 3 \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + n \times 2 \\ &= n \left(\frac{3(n-1)}{2} + 2 \right) \\ &= \boxed{\frac{n(3n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$2. \sum_{k=0}^n 3^{2k} = \sum_{k=0}^n 9^k = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \boxed{\frac{9^{n+1}-1}{8}}.$$

$$3. \text{ Calculons } \sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i+2}} :$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i+2}} = \sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i} \times 2^2} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i}} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^n \left(\frac{3}{2^3}\right)^i = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^n \left(\frac{3}{8}\right)^i.$$

Donc,

$$\sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i+2}} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{8}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}}{5} = \boxed{\frac{2}{5} \times \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}\right)}.$$

$$4. \text{ Calculons } \sum_{k=1}^n \left(2k - \frac{5}{7^k}\right) :$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(2k - \frac{5}{7^k}\right) &= 2 \sum_{k=1}^n k - 5 \sum_{k=1}^n \frac{1}{7^k} \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 5 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{7}\right)^k \\ &= n(n+1) - 5 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{7}\right)^k. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{7}\right)^k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{7}\right)^k + \left(\frac{1}{7}\right)^0 - \left(\frac{1}{7}\right)^0 \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{7}\right)^k - \left(\frac{1}{7}\right)^0 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{7}} - 1 \\ &= \frac{7\left(1 - \frac{1}{7^{n+1}}\right)}{6} - 1 \\ &= \frac{7\left(1 - \frac{1}{7^{n+1}}\right) - 6}{6} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{7^n}}{6} \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n \left(2k - \frac{5}{7^k}\right) = \boxed{n(n+1) - \frac{5}{6} \left(1 - \frac{1}{7^n}\right)}.$$

5. Calculons $\sum_{k=n}^{2n} (2k-3)$ grâce au changement d'indice $p = 2n - k$:

$$\begin{cases} p = 2n - k \\ n \leq k \leq 2n \end{cases} \iff \begin{cases} p = 2n - k \\ -2n \leq -k \leq -n \end{cases} \iff \begin{cases} p = 2n - k \\ 0 \leq 2n - k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} k = 2n + p \\ 0 \leq p \leq n. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} (2k-3) &= \sum_{p=0}^n (2(2n+p)-3) \\ &= \sum_{p=0}^n (4n-3+2p) \\ &= \sum_{p=0}^n (4n-3) + 2 \sum_{p=0}^n p \\ &= (n+1) \times (4n-3) + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1) \times \left(4n-3 + \frac{n}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{(n+1)(9n-6)}{2}}. \end{aligned}$$

78 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

• Développons $(1+1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^p 1^{2n-p} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{p} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{p}.$$

Or, $(1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n$. Ainsi,

$$4^n = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{p} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{p} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = P_n + S_n. \quad (1)$$

• Développons de même $(1-1)^{2n}$:

$$\begin{aligned} (1-1)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p 1^{2n-p} \\ &= \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p \\ &= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p. \end{aligned}$$

Or, $(1-1)^{2n} = 0^{2n} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \times 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \times (-1) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \\ &= P_n - S_n. \quad (2) \end{aligned}$$

• D'après (1) et (2), P_n et S_n vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} P_n + S_n = 4^n & (L_1) \\ P_n - S_n = 0. & (L_2) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} 2P_n = 4^n & (L_1) + (L_2) \\ S_n = P_n. \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{P_n = S_n = \frac{4^n}{2}}.$$

79

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$a_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}a_n.$$

Donc, la suite $(a_n)_n$ est géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $a_0 = 3/2$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2^{n+1}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = 2^{n+1}u_{n+1} = 2^{n+1}\left(a_n + \frac{1}{2}u_n\right) = 2^{n+1}\left(\frac{3}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \times \frac{b_n}{2^n}\right) = 3 + b_n.$$

Ainsi, la suite (b_n) est arithmétique de premier terme $b_0 = -1$ et de raison

3. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = -1 + 3n.$$

3. D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{-1 + 3n}{2^n}.$$

80

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : u_n > 0.$$

Démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n par récurrence.

- Initialisation. Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 1/3 > 0$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n} > 0.$$

Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + 3u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 3 \times \frac{u_n}{u_n} = v_n + 3.$$

On en déduit que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 3. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3 + 3n.$$

(b) D'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{3 + 3n}.$$

82

1. Démontrons que les suites sont adjacentes.

- Monotonie de $(u_n)_n$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est croissante.

- Monotonie de $(v_n)_n$:

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
 &= \frac{n(n+1)}{(n+1)!n(n+1)} + \frac{n}{(n+1)!n(n+1)} - \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)!n(n+1)} \\
 &= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)!n(n+1)} \\
 &= \frac{-1}{(n+1)!n(n+1)} \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

- Limite de la différence :

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, les deux suites sont bien adjacentes et convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.

2. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Ainsi, on obtient un encadrement de ℓ à 10^{-5} près dès que $v_n - u_n \leq 10^{-5}$, ce qui est le cas à partir de $n = 7$. Finalement :

$$\ell \in [u_7, v_7] \simeq [2,71827; 2,71828].$$

84 On a :

1. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow +\infty$
2. $u_n \sim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$
3. $e^{1-n} \rightarrow 0$ (par composition de limites)
4. $u_n \sim -n^2 \rightarrow -\infty$

5. $u_n \sim n \rightarrow +\infty$ (par croissances comparées)

6. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq n - 5,$$

donc, d'après le théorème de comparaison, $u_n \rightarrow \infty$.

7. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1},$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 0$.

8. On multiplie et on divise par la forme conjuguée correspondante pour lever l'indétermination :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

89

- Par définition,

$$2n^2 - n \sim 2n^2 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n}{2n^2} = 1.$$

Or :

$$\frac{2n^2 - n}{2n^2} = \frac{2n^2}{2n^2} - \frac{n}{2n^2} = 1 - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$. D'où

$$2n^2 - n \sim 2n^2.$$

- Démontrons que $\exp(2n) + n^3 + n! \sim n!$. Il s'agit de vérifier que :

$$\frac{\exp(2n) + n^3 + n!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Or,

$$\frac{\exp(2n) + n^3 + n!}{n!} = \frac{(e^2)^n}{n!} + \frac{n^3}{n!} + 1.$$

D'après le théorème des croissances comparées,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n!} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^2)^n}{n!} = 0 \quad \text{car } e^2 > 1. \end{cases}$$

On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2n) + n^3 + n!}{n!} = 1,$$

Autrement dit,

$$\exp(2n) + n^3 + n! \sim n!.$$

• Par définition,

$$2n^2 \sim n^2 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 1.$$

Or,

$$\frac{2n^2}{n^2} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2} \neq 1.$$

Par conséquent,

$$2n^2 \not\sim n^2.$$

90

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0.$$

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

• Initialisation. On a bien $0 \leq u_0 \leq 1$ car $u_0 = \frac{1}{2}$.

• Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\implies -0 \geq -u_n \geq -1 \\ &\implies 0 \leq 1 - u_n \leq 1 \\ &\implies 0 \leq u_n(1 - u_n) \leq u_n \quad \text{car } u_n \geq 0 \\ &\implies 0 \leq u_{n+1} \leq 1. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

• Conclusion. La propriété $0 \leq u_n \leq 1$ étant initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

3. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons sa limite ℓ . Par définition de $(u_n)_n$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que ℓ vérifie :

$$\ell = \ell - \ell^2,$$

soit après calculs $\ell = 0$.

91

1. Démontrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{1 + u_n} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{1 + u_n} - u_n)(\sqrt{1 + u_n} + u_n)}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{(1 + u_n) - u_n^2}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 1}{\sqrt{1 + u_n} + u_n}. \quad (\star) \end{aligned}$$

- Commençons par remarquer que le dénominateur est de signe strictement positif. En effet, $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 0$ car une racine carrée est toujours positive. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n \geq 0 \implies 1 + u_n \geq 1 \implies \sqrt{1 + u_n} \geq \sqrt{1} = 1,$$

car la fonction racine carrée est croissante. On en déduit finalement :

$$\sqrt{1 + u_n} + u_n \geq 1 + 0 > 0.$$

- Il reste à déterminer le signe du numérateur $-u_n^2 + u_n + 1$. Déterminons pour cela le signe du polynôme $P(x) = -x^2 + x + 1$. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$. Ce polynôme admet donc deux racines qui sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$, $P(x) \geq 0$. En particulier, puisque $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right], \quad P(x) \geq 0.$$

Pour démontrer que $(u_n)_n$ est croissante, il reste à démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(u_n) \geq 0$. Ainsi, il suffit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$. On a déjà démontré ci-dessus que $(u_n)_n$ est à termes positifs. Démontrons par récurrence sur n que $(u_n)_n$ est majorée par $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- ★ Initialisation. $u_0 = 1$ donc on a bien $u_0 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
- ★ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Puisque la fonction racine carrée est croissante, on en déduit :

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Or, on peut vérifier facilement que $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. En effet, en étudiant la différence entre ces deux nombres on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} &= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right)}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right)^2}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

★ D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$, et donc $-u_n^2 + u_n + 1 = P(u_n) \geq 0$. D'après (★), on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

2. La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée. Elle est donc convergente. Notons sa limite ℓ . Par définition de $(u_n)_n$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que ℓ vérifie :

$$\ell = \sqrt{1 + \ell},$$

et donc

$$\ell^2 = 1 + \ell.$$

Autrement dit,

$$P(\ell) = 0.$$

D'après la question précédente, les racines de P sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent, $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, $0 \leq \ell \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Finalement, on en déduit que :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

95

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n &= s_{2n} \\ v_n &= s_{2n+1} \end{cases}$$

et démontrons que ces suites sont adjacentes.

- Monotonie de $(u_n)_n$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= s_{2n+2} - s_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $(u_n)_n$ est croissante.

- On démontre de la même manière que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \leq 0,$$

et donc que $(v_n)_n$ est décroissante.

- Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc bien démontré que les deux suites sont adjacentes : d'après le cours elles convergent vers la même limite ℓ .

2. D'après le cours, si les deux suites extraites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite ℓ , alors la suite $(s_n)_n$ converge vers ℓ .

97 Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = 150.$$

Déterminons la raison q de $(u_n)_n$. Par définition d'une suite géométrique on sait que : $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus, pour tout entier naturel k , $u_k = u_0 q^k$. Donc :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_0 q^k) = u_0 \sum_{k=0}^n q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = 150$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 150.$$

Or, $u_0 = 90$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 90 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 150,$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-q^{n+1}) = \frac{150}{90} (1-q) = \frac{5}{3} (1-q).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 1 - \frac{5}{3} (1-q). \quad (\star)$$

D'autre part, on sait que :

- si $q \leq -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$, donc q^{n+1} n'a pas de limite ;
- si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = +\infty$.

Puisque, d'après (★), q^{n+1} admet une limite finie, alors on a nécessairement :

$$-1 < q < 1.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0. \quad (★★)$$

En utilisant (★) et (★★) et par unicité de la limite, on obtient :

$$1 - \frac{5}{3}(1 - q) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{5}{3}(1 - q) = 0 &\iff \frac{5}{3}(1 - q) = 1 \\ &\iff 1 - q = \frac{3}{5} \\ &\iff q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la raison de la suite $(u_n)_n$ est $q = \frac{2}{5}$.

98 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

- (a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.

1ère méthode :

- **Initialisation :** Par hypothèse $-1 < u_0 < 0$.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $-1 < u_n < 0$. Démontrons que $-1 < u_{n+1} < 0$. D'une part,

$$-1 < u_n < 0 \implies -3 < u_n - 2 < -2 \implies 2 < 2 - u_n < 3$$

D'autre part,

$$-1 < u_n < 0 \implies 3 < u_n + 4 < 4$$

$$\implies \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{3} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} -1 < u_n < 0 &\implies \begin{cases} 0 < 2 < 2 - u_n < 3 \\ 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\implies 2 \times \frac{1}{4} < (2 - u_n) \times \frac{1}{u_n + 4} < 3 \times \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{1}{2} < \frac{2 - u_n}{u_n + 4} < 1 \\ &\implies \frac{1}{2} < -u_{n+1} < 1 \\ &\implies -1 < u_{n+1} < -\frac{1}{2} \\ &\implies -1 < u_{n+1} < 0. \end{aligned}$$

La propriété $-1 < u_n < 0$ est donc héréditaire.

- **Conclusion :** par principe de récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0}.$$

2ème méthode : étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+4}$.

La fonction $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [-1, 0], f(x) = \frac{x-2}{x+4},$$

est dérivable sur $[-1, 0]$ comme quotient de fonctions polynomiales, et :

$$\forall x \in [-1, 0], f'(x) = \frac{1 \times (x+4) - (x-2) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{6}{(x+4)^2}.$$

On remarque que :

$$\forall x \in [-1, 0], f'(x) > 0.$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $[-1, 0]$.
Donc,

$$\forall x \in]-1, 0[, f(-1) < f(x) < f(0).$$

Or par définition de f : $f(-1) = \frac{-3}{3} = -1$ et $f(0) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$. On en déduit :

$$\forall x \in]-1, 0[, -1 < f(x) < 0. \quad (\star)$$

Démontrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n , $-1 < u_n < 0$.

- **Initialisation** : Par hypothèse $-1 < u_0 < 0$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $-1 < u_n < 0$. Démontrons que $-1 < u_{n+1} < 0$. Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in]-1, 0[$. D'après $(\star)$, on en déduit $-1 < f(u_n) < 0$, i.e. $-1 < u_{n+1} < 0$. La propriété $-1 < u_n < 0$ est donc héréditaire.

- **Conclusion** : par principe de récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0}.$$

- (b) Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n - 2}{u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{u_n - 2 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n^2 - 3u_n - 2}{u_n + 4} \\ &= -\frac{u_n^2 + 3u_n + 2}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

En calculant le discriminant du polynôme $x^2 + 3x + 2$, il est facile de vérifier que ce polynôme se factorise

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1).$$

Dressons alors le tableau de signes du polynôme $x^2 + 3x + 2$:

x	-2		-1	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0

On remarque que :

$$\forall x \in]-1, 0[, x^2 + 3x + 2 > 0.$$

D'après la question 1, $u_n \in]-1, 0[$. On en déduit : $u_n^2 + 3u_n + 2 > 0$.
D'autre part, $u_n + 4 > -1 + 4 > 0$. Ainsi,

$$\frac{u_n^2 + 3u_n + 2}{u_n + 4} > 0,$$

i.e.

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

Cela signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. D'après la question 1(b), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. D'après la question 1(a), elle est minorée (par -1). On en déduit, grâce au théorème de convergence monotone, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. On sait (voir question 1(a)) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0.$$

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on peut passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cet encadrement. On obtient alors :

$$-1 \leq \ell \leq 0.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 4} = \frac{\ell - 2}{\ell + 4}.$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Par unicité de la limite de u_{n+1} , on obtient :

$$\frac{\ell - 2}{\ell + 4} = \ell.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\ell - 2}{\ell + 4} = \ell &\iff (\ell - 2) = \ell(\ell + 4) \\ &\iff \ell^2 + 3\ell + 2 = 0 \\ &\iff (\ell + 2)(\ell + 1) \quad \text{d'après la question 1(b)} \\ &\iff \ell = -2 \text{ ou } \ell = -1 \\ &\iff \ell = -1 \quad \text{car } -1 \leq \ell \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1}.$$

99 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

1. Commençons par démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

- Étude de la monotonie de $(u_n)_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \geq u_n,$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

- Étude de la monotonie de $(v_n)_n$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \left(u_n + \frac{1}{2n^2} \right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{2n^2 + (n+1)n^2 - (n+1)^3}{2(n+1)^3 n^2}. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal rappelé ci-dessous,

$n \setminus k$	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

on a :

$$(n+1)^3 = \binom{3}{0} n^3 1^0 + \binom{3}{1} n^2 1^1 + \binom{3}{2} n^1 1^2 + \binom{3}{3} n^0 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2n^2 + n^3 + n^2 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{2(n+1)^3 n^2} \\ &= \frac{-3n - 1}{2(n+1)^3 n^2} \\ &= -\frac{3n + 1}{2(n+1)^3 n^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n \leq 0,$$

et donc que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

Puisque les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones de monotonies contraires et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

Par conséquent, ces deux suites convergent vers la même limite.

2. On note ℓ la limite commune de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n = \frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\ell - u_n| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque $|\ell - u_p| \leq \frac{1}{2p^2}$, il suffit que $\frac{1}{2p^2} \leq 0,01$ pour que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près. Or, on a :

$$\frac{1}{2p^2} \leq 0,01 \iff 2p^2 \geq \frac{1}{0,01} \iff p^2 \geq 50 \iff p \geq \sqrt{50}.$$

On choisit alors $p = 8$ car il s'agit du plus petit entier positif tel que $p^2 \geq 50$. Dans ce cas, u_p est une approximation de ℓ à 0,01 près.

3. On obtient le tableau de valeurs suivant grâce à la calculatrice :

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5	1,185	1,206
10	1,197	1,203
15	1,199	1,203

4. On sait que $u_{15} \leq \ell \leq v_{15}$, donc d'après le tableau ci-dessus on a :

$$1,199 \leq u_{15} \leq \ell \leq v_{15} \leq 1,203.$$

Ainsi,

$$1,199 \leq \ell \leq 1,203.$$

Notons c le milieu du segment $[1,199; 1,203]$: $c = \frac{1,199 + 1,203}{2} = \boxed{1,201}$.
 c est une valeur approchée de ℓ à la précision : $\frac{1,203 - 1,199}{2} = 0,002$.

100

- L'assertion « Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ » est vraie d'après un résultat du cours.
- « Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, il en est de même pour (u_n) » est une assertion fautive. En effet, si on considère la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = (-1)^n$, alors les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1 , mais (u_n) n'admet pas de limite.
- L'assertion « Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, de même limite ℓ , il en est de même pour (u_n) » est vraie d'après le cours.

101

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

- (a) Les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, si l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux tend vers 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\
 &= S_{2n+2} - S_{2n} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k a_k \\
 &= -a_{2n+1} + a_{2n+2}.
 \end{aligned}$$

Or

$$a_{2n+2} \leq a_{2n+1},$$

car la suite (a_n) est décroissante. Donc, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

- De la même manière, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\
 &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\
 &= \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k a_k \\
 &= (-1)^2 a_{2n+2} + (-1)^3 a_{2n+3} \\
 &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\
 &\geq 0 \quad \text{car } (a_n)_n \text{ est décroissante.}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$$

ce qui signifie que $(v_n)_n$ est croissante.

- Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
 v_n - u_n &= S_{2n+1} - S_{2n} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\
 &= -a_{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Or, la suite $(a_n)_n$ converge vers 0 et $(a_{2n+1})_n$ est une suite extraite de $(a_n)_n$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0.$$

On en déduit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

- (b) Comme (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent et admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Autrement dit, la sous-suite $(S_{2n})_n$ des termes d'indices pairs de $(S_n)_n$ et la sous-suite $(S_{2n+1})_n$ des termes d'indices impairs de $(S_n)_n$ ont la même limite ℓ . D'après le cours, on peut en conclure que $(S_n)_n$ converge vers ℓ .

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + [b_n] + 1. \end{cases}$$

- (a) Notons, pour tout n entier naturel,

$$P(n) : -1 \leq b_n < 0.$$

Démontrons, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Comme $b_0 = -1/2$, $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, i.e.

$$-1 \leq b_n < 0.$$

Alors, $[b_n] = -1$. Ainsi :

$$b_{n+1} = \sin(b_n) + [b_n] + 1 = \sin(b_n).$$

D'autre part, d'après l'énoncé :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

Donc, puisque $-1 \leq b_n < 0$, on a :

$$\sin(b_n) > b_n \geq -1.$$

Ainsi,

$$b_{n+1} \geq -1.$$

De plus, $b_n \in [-1, 0[$. Donc $b_n \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Or,

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \quad \sin(x) < 0.$$

Ainsi,

$$\sin(b_n) < 0,$$

i.e.

$$b_{n+1} < 0.$$

Par conséquent,

$$-1 \leq b_{n+1} < 0,$$

et $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** $P(0)$ étant vraie et P étant héréditaire, on déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq b_n < 0}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $b_n \in [-1, 0[$. Par conséquent, $[b_n] = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n)}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$b_{n+1} - b_n = \sin(b_n) - b_n.$$

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, $\sin(b_n) - b_n > 0$ puisque $b_n \in [-1, 0[$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - b_n > 0.$$

$\boxed{\text{La suite } (b_n)_n \text{ est donc (strictement) croissante.}}$

- (d) D'après le théorème de convergence monotone, $(b_n)_n$ étant croissante et majorée (par 0), elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \ell.$$

D'autre part, d'après la relation trouvée à la question 2(b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n).$$

Or, par continuité de la fonction sinus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(b_n) = \sin(\ell).$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \sin(\ell).$$

Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\sin(\ell) = \ell.$$

Or, d'après l'indication de l'énoncé, cette équation n'a pas de solution sur $[-1, 0[$ car

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

De plus, d'après la question 2(a), on sait que la limite de $(b_n)_n$ est un élément de $[-1, 0]$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq b_n < 0.$$

Par conséquent, $\ell = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0}.$$

- (e) Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -b_n.$$

Alors, d'après les questions 2(a) et 2(c), $(a_n)_n$ est une suite de nombres positifs qui est décroissante et qui vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. D'après la question 1, on en déduit que la suite $(S_n)_n$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

converge. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (-b_k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k.$$

Donc la suite de terme général $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k$ converge.

122 $\mathcal{P}(\{a\})$ est l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble $\{a\}$. Les sous-ensembles de $\{a\}$ sont : $\emptyset$ et $\{a\}$. Donc,

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\}.$$

Notons $x = \emptyset$ et $y = \{a\}$, de sorte que $\mathcal{P}(\{a\}) = \{x; y\}$. Les sous-ensembles de l'ensemble $\{x; y\}$ sont : $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x; y\}$. Ainsi,

$$\mathcal{P}(\{x; y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x; y\}\}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset; \{a\}\}\}.$$

123

- On a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
 - De plus,

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies A \cup B \subset B \cup B \\ &\implies A \cup B \subset B \\ &\implies A \cup B = B \quad \text{car } B \subset A \cup B. \end{aligned}$$

On a donc,

$$A \subset B \implies A \cup B = B.$$

- Réciproquement, sachant que $A \subset A \cup B$, on a :

$$A \cup B = B \implies A \subset B.$$

Par conséquent,

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

- D'une part,

$$A = B \implies \begin{cases} A \cap B = B \cap B = B \\ A \cup B = B \cup B = B \end{cases} \implies A \cap B = A \cup B.$$

D'où,

$$A = B \implies A \cap B = A \cup B.$$

- D'autre part, si $A \cap B = A \cup B$, alors :
 - puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset A \cap B$ et donc $A \subset B$ (car $A \cap B \subset B$),
 - puisque $B \subset A \cup B$, on a $B \subset A \cap B$, donc $B \subset A$.
 Donc, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A \subset B$ et $B \subset A$ et donc $A = B$. Ainsi,

$$A \cap B = A \cup B \implies A = B.$$

On en déduit que :

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B.$$

124

- On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n.$$

Par définition, f est bijective si et seulement si tout élément de $\mathbb{N}$ admet un unique antécédent par f .

On remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est un entier pair. Par conséquent, si on considère un élément y de $\mathbb{N}$ qui est impair alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq y.$$

Ainsi, les éléments de $\mathbb{N}$ qui sont des entiers impairs n'ont pas d'antécédent par f . En en déduit que f n'est pas bijective.

2. Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque 1 est un entier impair, alors $g(1) = 1$. Et, puisque 2 est un entier pair, alors on a : $g(2) = \frac{2}{2} = 1$. Par conséquent l'élément 1 de $\mathbb{N}$ admet au moins deux antécédents par g : 1 et 2. On en déduit que g n'est pas bijective.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $(g \circ f)(n)$.

Par définition de $g \circ f$, on sait que : $(g \circ f)(n) = g(f(n))$.

Or, $f(n) = 2n$. Donc $f(n)$ est pair. Par définition de g , on en déduit que :

$$g(f(n)) = \frac{f(n)}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

Ainsi, $(g \circ f)(n) = n$.

4. • D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (g \circ f)(n) = n.$$

Donc : $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Si on avait $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$, alors puisqu'on a $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, on en déduirait que f est bijective et que $f^{-1} = g$ (voir le théorème 5.66 du cours).

Or, on sait d'après la question 1 que f n'est pas bijective. Par conséquent, l'assertion $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ est fausse. Autrement dit,

$$f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)).$$

Or,

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}.$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(p) = 2p$. Par conséquent,

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} 2 \times \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 \times n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

125

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (2x - y, x + y).$

Par définition, f est bijective si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, (a, b) = f(x, y).$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $(a, b) = f(x, y)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (a, b) = f(x, y) &\iff (a, b) = (2x - y, x + y) \\ &\iff \begin{cases} 2x - y = a & L_1 \\ x + y = b & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x - y = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = b \\ -3y = a - 2b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = b - \frac{2b - a}{3} = \frac{a + b}{3} \\ y = \frac{2b - a}{3} \end{cases} \\ &\iff (x, y) = \left(\frac{a + b}{3}, \frac{2b - a}{3} \right). \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(a, b) = f(x, y)$ admet une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{2b-a}{3} \right).$$

Donc tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f qui est :

$$\left(\frac{a+b}{3}, \frac{2b-a}{3} \right).$$

Par conséquent, f est bijective et sa bijection réciproque est l'application :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) \mapsto \left(\frac{a+b}{3}, \frac{2b-a}{3} \right).$$

- L'application suivante est bijective

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \sqrt{2}\bar{z} + iz.$$

si et seulement si :

$$\forall \xi \in \mathbb{C}, \exists ! z \in \mathbb{C}, \xi = g(z).$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$.

Résolvons l'équation $\xi = g(z)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Écrivons ξ et z sous forme algébrique :

$$\xi = a + ib \quad \text{et} \quad z = x + iy,$$

avec a, b, x et y des nombres réels.

$$\xi = g(z) \iff \xi = \sqrt{2}\bar{z} + iz$$

$$\iff a + ib = \sqrt{2}(x - iy) + i(x + iy)$$

$$\iff a + ib = \sqrt{2}(x - iy) + i(x + iy)$$

$$\iff a + ib = \sqrt{2}(x - iy) + ix - y$$

$$\iff a + ib = (\sqrt{2}x - y) + i(x - \sqrt{2}y)$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{2}x - y = a \\ x - \sqrt{2}y = b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{par identification des parties réelles} \\ \text{et imaginaires} \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x - \sqrt{2}y = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x - \sqrt{2}(\sqrt{2}x - a) = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x - 2x + \sqrt{2}a = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x = \sqrt{2}a - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}(\sqrt{2}a - b) - a = a - \sqrt{2}b \\ x = \sqrt{2}a - b \end{cases}$$

$$\iff x + iy = (\sqrt{2}a - b) + i(a - \sqrt{2}b)$$

$$\iff z = (\sqrt{2}a - b) + i(a - \sqrt{2}b)$$

$$\iff z = \sqrt{2}(a - ib) + ia - b$$

$$\iff z = \sqrt{2}(a - ib) + i(a + ib)$$

$$\iff z = \sqrt{2}\bar{\xi} + i\xi.$$

On en déduit que l'équation $\xi = g(z)$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z = \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi$. Par conséquent, tout élément ξ de $\mathbb{C}$ admet un unique antécédent par g qui est : $\sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi$. Ainsi, g est bijective et sa bijection réciproque est l'application définie par :

$$\begin{array}{lcl} g^{-1} : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi. \end{array}$$

Notons que pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, on a :

$$g^{-1}(\xi) = \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi = g(\xi).$$

Par conséquent, $g^{-1} = g$.

- On considère l'application φ ci-dessous,

$$\begin{array}{lcl} \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ X & \mapsto & \{1; 2; 3\} \cup X \end{array}.$$

On remarque, par exemple, que :

$$\begin{cases} \varphi(\{1\}) = \{1; 2; 3\} \cup \{1\} = \{1; 2; 3\} \\ \varphi(\{2\}) = \{1; 2; 3\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3\}. \end{cases}$$

Ainsi, $\{1\}$ et $\{2\}$ sont deux antécédents (distincts) de $\{1; 2; 3\}$. Par conséquent, $\{1; 2; 3\}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui admet au moins deux antécédents par φ . Donc φ n'est pas bijective.

Remarque :

- On peut également construire d'autres éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui admettent au moins deux antécédents par φ .
- Par ailleurs, il existe également des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'admettent aucun antécédent par φ . En effet, pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a : $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3\} \cup X$. Donc pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a : $\{1; 2; 3\} \subset \varphi(X)$. On en déduit, par exemple, que pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\varphi(X) \neq \emptyset$ car l'ensemble $\varphi(X)$ contient au moins les éléments 1, 2 et 3. Par conséquent l'élément $\emptyset$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'admet pas d'antécédent par φ . Ce qui permet d'affirmer que φ n'est pas bijective.

126 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque et calculons $(f \circ f)(n)$. Par définition de la composée de deux fonctions, on a :

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)).$$

- Supposons que n est pair. Alors :
 - ★ $f(n) = n+1$ donc $(f \circ f)(n) = f(n+1)$,
 - ★ $n+1$ est impair donc $f(n+1) = (n+1) - 1 = n$.
 Ainsi, $(f \circ f)(n) = n$.
- Supposons maintenant que n est impair. Alors :
 - ★ $f(n) = n-1$ donc $(f \circ f)(n) = f(n-1)$,
 - ★ $n-1$ est pair donc $f(n-1) = (n-1) + 1 = n$.
 Ainsi, $(f \circ f)(n) = n$.

On a donc, que n soit pair ou impair : $(f \circ f)(n) = n$.

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (f \circ f)(n) = n}.$$

On en déduit que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Or d'après le cours, si il existe une application $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$. Puisque $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, on déduit de ce résultat que $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et que $\boxed{f^{-1} = f}$.

137

1. Étudions si la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

est prolongeable par continuité en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On sait que $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, i.e. $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$. Par conséquent,

$$|f(x)| = |\sin(x)| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |\sin(x)|.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 0 \leq |f(x)| \leq |\sin(x)|.$$

Or, on sait par continuité de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| = |\sin(0)| = 0.$$

On déduit donc du théorème des gendarmes que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}.$$

La fonction f admet donc une limite finie en 0 (qui vaut 0).

Autrement dit, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$, en posant $f(0) = 0$.

2. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}.$$

D'après le cours, g est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si g admet une limite finie en 0. Rappelons que d'après les équivalents usuels en 0 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Soit x un nombre réel non nul

- Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(x) > 0$, donc $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1.$$

- Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\sin(x) < 0$ et donc : $g(x) = \frac{-\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$. Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1.$$

g admet donc une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 0. Mais, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, la fonction g n'admet pas de limite en 0. Par conséquent, $\boxed{g \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0}$.

145

1. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}$, forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

Soit x au voisinage de 0 tel que $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} &= \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} \times \frac{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (1 + \frac{x}{2})^2}{x^2 (\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}))} \\ &= \frac{(1+x) - (1 + x + \frac{x^2}{4})}{x^2 (\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}))} \\ &= -\frac{1}{4(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4(1+1)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} = -\frac{1}{8}$.

2. Posons alors, pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} + \frac{1}{8},$$

de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Prolongeons la fonction ε par continuité en 0 en posant : $\varepsilon(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x)$
i.e. $\varepsilon(0) = 0$. Par définition de la fonction ε on a, pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} + \frac{1}{8} &\iff \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} = -\frac{1}{8} + \varepsilon(x) \\ &\iff \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \\ &\iff \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Notons que cette dernière formule est encore vraie pour $x = 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x).$$

147

1. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a : $e^x - x^2 + 1 = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$.

Or,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 1) = +\infty$.

2. Pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right) &= x \frac{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right) \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1 \right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= x \frac{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} \right)^2 - 1^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= x \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right) - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= x \frac{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= \frac{5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, d'après les opérations sur les limites de fonctions,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right) = \frac{5+0}{\sqrt{(1+0)(1+0)}+1} = \frac{5}{2}.$$

3. Pour tout x au voisinage de 0 tel que $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \frac{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2x}{\frac{\sin(5x)}{5x} \times 5x} = \frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{\sin(5x)}{5x}} \times \frac{2}{5}.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (5x) = 0$.

Or, d'après les équivalents usuels en 0, on sait que :

$$\sin(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$$

i.e.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

On en déduit, par composition de limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

4. Soit x au voisinage de 1 tel que $x \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ pour a et b deux nombres réels ou le développement de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ pour $q \neq 1$, on sait que :

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}.$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

148

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Étudions si f est prolongeable par continuité en 0, autrement dit, si f admet une limite finie en 0.

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Alors les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers 0 et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} f(u_n) = \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(2n\pi) = \sin(0) = 0 \\ f(w_n) = \sin\left(\frac{1}{w_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(w_n) = 1.$$

On remarque que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(w_n)$.

On en déduit, d'après le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

Ainsi, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}.$$

Par définition, g est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si g admet une limite finie en 0. Or, pour tout x au voisinage de 0 tel que $x \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule du binôme et le triangle de Pascal :

$$g(x) = \frac{\left(\binom{3}{0}1^0x^{3-0} + \binom{3}{1}1^1x^{3-1} + \binom{3}{2}1^2x^{3-2} + \binom{3}{3}1^3x^{3-3}\right) - 1}{x} \\ = \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1}{x} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x} = x^2 + 3x + 3.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x + 3) = \boxed{3}.$$

La fonction g admet une limite finie en 0.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$, en posant $g(0) = 3$.

Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 0.$$

Par conséquent, la courbe représentant la fonction f admet une asymptote en $+\infty$, d'équation :

$$\boxed{y = 3x}.$$

149 On considère la fonction f définie par :

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x) - 1}{\sqrt{x}} + 3x.$$

On a alors,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + 3x,$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

De plus, d'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0.$$

150 Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{4x^3 - 3x^2}{x^2 - 8} + 1.$$

On sait que, pour tout réel x au voisinage de $-\infty$,

$$\frac{4x^3 - 3x^2}{x^2 - 8} = \frac{x^3(4 - \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{8}{x^2})} = x \frac{4 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{8}{x^2}}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{3}{x}\right) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{8}{x^2}\right) = 1.$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- Calculons alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Soit x au voisinage de $-\infty$. On a,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{4 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{8}{x^2}} + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 0}{1 - 0} + 0 = 4.$$

- Calculons alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 4x)$.

Pour tout x au voisinage de $-\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) - 4x &= \frac{4x^3 - 3x^2}{x^2 - 8} - 4x + 1 \\ &= \frac{4x^3 - 3x^2 - 4x(x^2 - 8)}{x^2 - 8} + 1 \\ &= \frac{-3x^2 + 32x}{x^2 - 8} + 1 \\ &= \frac{-3 + \frac{32}{x}}{1 - \frac{8}{x^2}} + 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 4x) = \frac{-3 + 0}{1 - 0} + 1 = -2.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (4x - 2)) = 0.$$

Par conséquent, la courbe représentant la fonction f admet une asymptote en $-\infty$, d'équation :

$$y = 4x - 2.$$

151 On considère la fonction

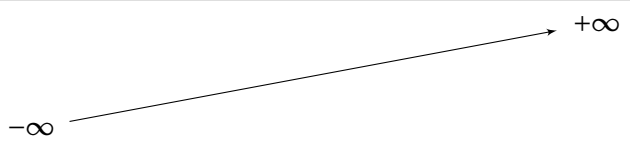
$$g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10.$$

1. La fonction g est clairement dérivable sur son ensemble de définition. De plus :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, g'(x) = \frac{10}{1+x} + 2(1+x) > 0.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1	$+\infty$
signe de $g'(x)$		+
variations de g		

2. La fonction g étant strictement monotone, elle établit une bijection de l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ dans $J = g(I) = g(]-1, +\infty[)$. De plus, par continuité et croissance de g , on a :

$$J =] \lim_{x \rightarrow -1} g(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) [=] -\infty, +\infty [.$$

3. Comme $0 \in J$ et g est bijective de I dans J , d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 0$ c'est-à-dire à l'équation : $10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10 = 0$.

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ a pour ensemble de définition $] -1, +\infty[$ car l'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est $]0, +\infty[$,
- le dénominateur de f ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$.

5. • Par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = -\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 10\ln(1+x)) = +\infty.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (1+x) = 0^+$. Donc, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$. Par produit, on en déduit la limite de f en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty.$$

- Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} - 10 \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{x}{\frac{1}{x} + 1} - 10 \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty$ et on sait, d'après le théorème des croissances comparées, que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$. Donc, par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0.$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

6. La droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.

Or, pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) - (x - 1) = \frac{-1 - 10\ln(1+x)}{1+x} = -\frac{1}{1+x} - 10 \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Sachant que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$ (d'après la théorème des croissances comparées),

on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0.$$

Autrement dit, la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est bien une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

168 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-\pi < \theta < \pi$.

1. En utilisant l'angle moitié, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque $-\pi < \theta < \pi$, on a $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

Donc l'expression $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ est l'écriture exponentielle de $1 + e^{i\theta}$.

2. Soit $u = 1 + e^{i\theta}$. Alors, d'après la question 1, $u = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et :

$$\begin{aligned} u^2 - (2 + 2\cos\theta)u + (2 + 2\cos\theta) &= \left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 - (2 + 2\cos\theta)(u - 1) \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta} - (2 + 2\cos\theta)e^{i\theta} \\ &= 2e^{i\theta}\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - (1 + \cos\theta)\right) \\ &= 2e^{i\theta}\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= 2e^{i\theta}\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 - (\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right))\right) \\ &= 2e^{i\theta}\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) \\ &= 2e^{i\theta} \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre complexe u est solution de l'équation

$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + (2 + 2\cos\theta) = 0.$$

Autrement dit, u est racine du polynôme $P(X)$ défini par :

$$P(X) = X^2 - (2 + 2\cos\theta)X + (2 + 2\cos\theta),$$

car $P(u) = 0$. Le polynôme $P(X)$ étant de degré 2, il admet exactement deux racines complexes (distinctes ou confondues). Or, $P(X)$ étant à coefficients réels, on remarque que :

$$P(\bar{u}) = (\bar{u})^2 - (2 + 2\cos\theta)\bar{u} + (2 + 2\cos\theta) = \overline{P(u)} = \overline{0} = 0.$$

Par conséquent, $\bar{u}$ est aussi racine de $P(X)$.

Les solutions de l'équation $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + (2 + 2\cos\theta) = 0$ sont donc :

$$u = 1 + e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \bar{u} = 1 + e^{-i\theta}.$$

169

1. On remarque que $P(1) = n \neq 0$. Donc 1 n'est pas racine de P .
Considérons alors $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-2} + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \\ &\iff 1 - z^n = 0 \\ &\iff z^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [0, n-1], z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [1, n-1], z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{car } e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{n}} = 1 \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont les $n - 1$ nombres complexes

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [1, n-1].$$

2. On déduit de la question 1 la factorisation suivante :

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right).$$

3. On en déduit également :

$$\left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \right| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \right| = |P(1)| = \left| \underbrace{1 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1}}_{=n} \right| = n.$$

4. Soit $k \in [1, n-1]$.

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} &= e^{i\frac{k\pi}{n}} e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}} e^{i\frac{k\pi}{n}} \\ &= e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= -e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= -2ie^{i\frac{k\pi}{n}} \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i} \\ &= -2ie^{i\frac{k\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$\begin{aligned}
 n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| \\
 &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \\
 &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \right) \\
 &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} 2 \right) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \right) \\
 &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|.
 \end{aligned}$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$ on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et par conséquent :

$$\left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Ainsi,

$$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n,$$

i.e.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

170

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 |z - \alpha|^2 &= |(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) - \alpha|^2 \\
 &= |(\operatorname{Re}(z) - \alpha) + i\operatorname{Im}(z)|^2 \\
 &= (\operatorname{Re}(z) - \alpha)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \\
 &\geq (\operatorname{Im}(z))^2.
 \end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :

$$|z - \alpha| \geq \sqrt{(\operatorname{Im}(z))^2} = |\operatorname{Im}(z)|.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| \geq |\operatorname{Im}(z)|}.$$

2. On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$ et unitaire, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k).$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \left| \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k) \right| = \prod_{k=1}^n |z - \alpha_k|.$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, donc d'après la question précédente : $\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha_k| \geq |\operatorname{Im}(z)|$.

Par conséquent

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq \prod_{k=1}^n |\operatorname{Im}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|^n}.$$

3. Soit $P = 1 + X^3$.

(a) Cherchons les racines complexes de P . Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff z^3 = -1 \iff z^3 = e^{i\pi} \\ &\iff \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z^3) = \pi + k2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \pi + k2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \text{ car } r \geq 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{i(\pi/3 + k2\pi/3)} \\ &\iff z = e^{i\pi/3} \text{ ou } z = e^{i\pi} = -1 \text{ ou } z = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}. \end{aligned}$$

Les racines complexes de P sont donc -1 , $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ et une décomposition de P en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = (X + 1) \left(X - e^{i\pi/3} \right) \left(X - e^{-i\pi/3} \right).$$

(b) Posons $z_0 = e^{i\pi/3}$. On a alors $P(z_0) = 0$ car z_0 est une racine de P et $\operatorname{Im}(z_0) = \frac{\pi}{3} \neq 0$, donc

$$|P(z_0)| < |\operatorname{Im}(z_0)|^3.$$

4. Supposons que : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine quelconque de P . Démontrons que z est réelle. Par hypothèse : $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)| = 0$. Donc $|\operatorname{Im}(z)|^n = 0$ et par conséquent $\operatorname{Im}(z) = 0$, ce qui signifie que z est un nombre réel. On en déduit donc que toutes les racines de P sont réelles.

Tout polynôme non constant étant scindé sur $\mathbb{C}$, le polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n),$$

avec $\alpha_1 \in \mathbb{C}, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P . Or, on a démontré que toutes les racines de P sont réelles. On en déduit donc que : $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Le polynôme P est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

5. • On a démontré dans la question 2 que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.
• Dans la question précédente, on a démontré que si l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

est vraie, alors P est scindé sur $\mathbb{R}$.

On a donc démontré le résultat suivant :

« Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$. P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$. »

171

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $P_n(z) = 0 \iff z^n - (z-1)^n = 0 \iff z^n = (z-1)^n$. Remarquons que $P_n(0) = 0^n - (0-1)^n = -(-1)^n \neq 0$. Ainsi 0 n'est pas solution de l'équation $P_n(z) = 0$. On peut donc écrire :

$$P_n(z) = 0 \iff \frac{(z-1)^n}{z^n} = 1 \iff \left(\frac{z-1}{z} \right)^n = 1 \iff \left(1 - \frac{1}{z} \right)^n = 1.$$

Ainsi $P_n(z) = 0$ si et seulement si $1 - \frac{1}{z}$ est une racine n -ième de l'unité. Notons $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les n racines n -ièmes de l'unité définies par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 1 - \frac{1}{z} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{z} = 1 - \omega_k. \end{aligned}$$

Or l'équation $\frac{1}{z} = 1 - \omega_k$ a des solutions si et seulement si $1 - \omega_k \neq 0$. De plus, la seule racine n -ième de l'unité égale à 1 est $\omega_0 = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{1}{z} = 1 - \omega_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = \frac{1}{1 - \omega_k}. \end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P_n(z) = 0$ sont donc les $n - 1$ nombres complexes de la forme $z_k = \frac{1}{1 - \omega_k}$ avec $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

2. Pour tout réel θ ,

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= (1 - e^{i\theta}) e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\theta} e^{-i\frac{\theta}{2}}) e^{i\frac{\theta}{2}} = (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2i \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i} \right) e^{i\frac{\theta}{2}} = \boxed{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} \text{ d'après les formules d'Euler.} \end{aligned}$$

3. Les racines de $P_n(X)$ sont les solutions $z_1, \dots, z_{n-1}$ de l'équation $P_n(z) = 0$ trouvées dans la question 3(a). Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On a :

$$z_k = \frac{1}{1 - \omega_k} = \frac{1}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}},$$

et d'après la question 3(b) avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ on a $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = -2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}$.
D'où

$$z_k = \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{i}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{-i\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Puisque $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on a $0 < k < n$, donc $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ et donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.

La forme exponentielle de z_k est donc : $z_k = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}$.

172 On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

Soit α une racine complexe, non réelle et double de P .

1. Comme α est une racine double, on sait d'après le cours que :

$$\boxed{P(\alpha) = P'(\alpha) = 0}.$$

2. Le polynôme P est à coefficients réels. On sait dans ce cas que si α est une racine complexe de P , alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P . En appliquant le même raisonnement à P' , on en déduit que $\bar{\alpha}$ est racine double de P .
3. P est un polynôme de degré 4 de coefficient dominant 1 et admettant pour racines doubles α et $\bar{\alpha}$. On en déduit immédiatement que :

$$\boxed{P(X) = 1 \times (X - \alpha)^2 (X - \bar{\alpha})^2}.$$

4. La factorisation de P sur $\mathbb{R}[X]$ est obtenue en regroupant les racines conjuguées de P . Ainsi :

$$\begin{aligned} \boxed{P(X)} &= ((X - \alpha)(X - \bar{\alpha}))^2 \\ &= (X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha})^2 \\ &= (X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2) \cdot (X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2). \end{aligned}$$

5. En utilisant l'expression factorisée de P donnée à la question 3, on trouve :

$$\boxed{P(0)} = (0 - \alpha)^2 (0 - \bar{\alpha})^2 = (\alpha\bar{\alpha})^2 = |\alpha|^4$$

Or $P(0) = 1$ par définition de P . On en déduit : $|\alpha| = 1$ (car c'est un nombre réel positif).

6. En développant l'expression donnée à la question 3, on trouve :

$$P(X) = X^4 - 4\Re(\alpha)X^3 + (2|\alpha|^2 + 4\Re(\alpha)^2)X^2 - 4\Re(\alpha)|\alpha|^2X + |\alpha|^4.$$

Par identification avec les coefficients du polynôme P , on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} -4\Re(\alpha) = -2 \\ 2|\alpha|^2 + 4\Re(\alpha)^2 = 3 \\ -4\Re(\alpha)|\alpha|^2 = -2 \\ |\alpha|^4 = 1 \end{cases}$$

On en déduit alors : $\Re(\alpha) = \frac{1}{2}$. Et puisque $|\alpha|^2 = (\Re(\alpha))^2 + (\Im(\alpha))^2$, il vient :

$$(\Im(\alpha))^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{I}m(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \mathcal{I}m(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

189

1. Démontrons que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Soit $x \in]-1; +\infty[$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f :]-1; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln(1+t). \end{aligned}$$

Puisque la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors par composition la fonction f est dérivable sur $]-1; +\infty[$. De plus,

$$\forall t \in]-1; +\infty[, \quad f'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

- Si $x = 0$, alors $\ln(1+x) \leq x$ puisque $\ln(1) = 0$.
- Supposons $x > 0$. La fonction f étant continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis. Par conséquent, il existe un réel $c \in]0; x[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Puisque $c > 0$, on a $0 \leq \frac{1}{1+c} \leq 1$, c'est-à-dire

$$0 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1.$$

En multipliant par x qui est strictement positif, on obtient :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

- Supposons $-1 < x < 0$. f est continue sur $[x; 0]$ et dérivable sur $]x; 0[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; 0[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On a :

$$-1 < x < c < 0 \implies 0 < 1+x < 1+c < 1$$

$$\implies \frac{1}{1+c} \geq 1 \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$\implies \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1$$

$$\implies \ln(1+x) \leq x \quad \text{car } x < 0.$$

Par conséquent, on a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x}.$$

2. Considérons un entier naturel $n \geq 2$. On a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln(1 - \frac{1}{n})}.$$

Par conséquent, on a les équivalences suivantes :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$\iff e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \leq e \leq e^{-n \ln(1 - \frac{1}{n})}$$

$$\iff n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln$$

$$\iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}.$$

Or, on sait d'après la question 1 que, puisque $\frac{1}{n} > -1$ et $-\frac{1}{n} > -1$, alors :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}.$$

D'après les équivalences ci-dessus on en déduit :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

190 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Puisque f est continue sur $[a, b]$, alors g l'est également. De même, g est dérivable sur $]a, b[$ et :

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

D'autre part, $f(a) = f(b) = 0$ donc : $g(a) = g(b)$. Le théorème de Rolle permet alors d'affirmer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or on a :

$$\begin{aligned} g'(c) = 0 &\iff \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2} = 0 \\ &\iff f'(c)c - f(c) = 0 \\ &\iff f'(c) = \frac{f(c)}{c} \quad \text{car } c > 0 \text{ (puisque } 0 < a < c < b). \end{aligned}$$

On a donc bien démontré l'affirmation suivante :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

2. Cela signifie qu'il existe un point c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que la tangente à la courbe de f au point C de coordonnées $(c, f(c))$ est parallèle à la droite (OC) , où O est le point de coordonnées $(0, 0)$.

191 On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Rappelons que par définition, f est continue en 0 si :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{1-x}\right) = 1.$$

D'autre part, d'après les équivalents usuels en 0, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Or, par définition de f , on a : $f(0) = 0 + \frac{1}{1-0} = 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Autrement dit, f est bien continue en 0.

2. Démontrons que f est dérivable à droite en 0. Calculons pour cela le taux d'accroissement de f en 0^+ . Soit $x > 0$, alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, on a :

$$e^x - 1 - x \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

D'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1/2$.

3. Étudions la dérivabilité à gauche de f en 0. Soit $x < 0$, alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + \frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{\frac{x(1-x)+1-(1-x)}{1-x}}{x} = \frac{\frac{x(2-x)}{1-x}}{x} = \frac{2-x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2.$$

On en déduit que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 2$.

4. On déduit des deux questions précédentes que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à gauche et à droite en 0 ne coïncident pas.

5. On remarque que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

où la deuxième limite est obtenue à l'aide du théorème de croissances comparées.

6. (a) Rappelons que, pour tout $x < 0$:

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ puisque :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

(b) Soit $x \leq 0$. Alors :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} > 0.$$

Donc, $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0]$.

(c) Soit T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1. Alors, d'après le cours, l'équation de T est donnée par :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Or,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}.$$

D'où $f'(1) = 1$. De plus, $f(1) = e - 1$.

Donc, T a pour équation $y = e - 1 + (x - 1)$, i.e. $y = e - 2 + x$.