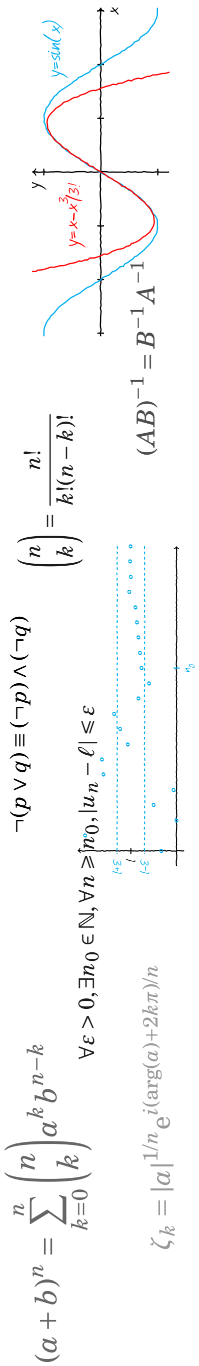


S'EXPRIMER EN MATHÉMATIQUES

1. Les essentiels

1 [a] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne prend que des valeurs positives,
2. f s'annule,
3. f est majorée,
4. f est bornée,
5. f n'est pas la fonction nulle,
6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.

2 [b] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est la fonction nulle,
2. f s'annule une seule fois,
3. f est bornée,
4. f est paire,
5. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

3 [a] Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x\in I,\ f(x)\neq 0$;
2. $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in I,\ f(x)=y$;
3. $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ |f(x)|\leqslant M$;
4. $\forall x\in I,\ (f(x)>0\Rightarrow x\leqslant 0)$.

4 [b] Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x\in I,\ f(x)\leqslant 0$
2. $\forall z>0,\ \exists x\in I,\ f(x)=z$
3. $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ f(x)+M=0$
4. $\forall x\in I,\ (f(x)=0\Rightarrow x=0)$.

5 [a] [b]

1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P\Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b. On considère l'implication $(\star)$ suivante :

$$\big(\exists k\in\mathbb{Z},\ a=b+2k\pi\big)\Rightarrow\ \sin(a)=\sin(b).$$

   (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
   (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
   (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
   (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

2. Pour travailler seul

6 On définit les assertions suivantes :

- B : « Je bouge. »
- D : « Je dors. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »

Exprimer sous forme symbolique les affirmations ci-dessous.

1. Je dors et je rêve, mais je ne bouge pas.
2. Quand je dors, je ne parle pas.
3. Chaque fois que je dors, je parle mais je ne bouge pas.
4. Si je dors ou si je parle, alors je bouge.
5. Il suffit que je dorme pour que je rêve.
6. Une condition nécessaire pour que je dorme et que je parle est que je rêve.
7. Je dors et je parle si et seulement si je rêve ou je bouge.
8. Soit je dors et je rêve, soit si je bouge alors je ne parle pas.

7 Les phrases suivantes signifient-elles $A \Rightarrow B$ ou $B \Rightarrow A$?

1. Si A, alors B.
2. Pour que A, il faut que B.
3. Pour que A, il suffit que B.
4. A est une condition suffisante pour B.
5. A est une condition nécessaire pour B.
6. A dès que B.
7. A est faux si B l'est.

8 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) = C$,
2. $\forall x \in I, \quad \big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$,
3. $\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad \big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\big)$,
4. dans le cas où $I = \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\pi) = f(x)$.

9 On considère l'assertion (P) : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(x^2 \geqslant 5 \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{5}\big)$. Écrire la négation de (P). (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

10 *« Si je dors, alors je rêve et je ne ronfle pas. Si je ne ronfle pas, alors je parle. Je ne parle pas. »* Que peut-on en déduire ?

- ☐ Je ronfle.
- ☐ Je ne ronfle pas.
- ☐ Je ne dors pas.
- ☐ Je ne rêve pas.
- ☐ Je dors et je ronfle.
- ☐ Je ne rêve pas et je ne dors pas.

Calculer dans l'ensemble des nombres réels

1. Les essentiels

1.1 Équations et inéquations

11 a b Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;2]$.

12 a b Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 1 + f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

13 a Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : |x-5| = 2\,|x+5|$, $\qquad (E_2) : |2-x| + |2x-1| = 2$.

14 b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

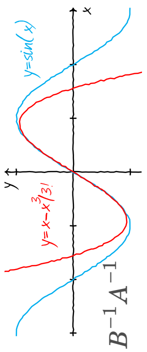
$(E_1) : x + |x-1| = 1 + |x|$, $\qquad (E_2) : 2x^2 + |x-1| = |x+1|$.

15 a Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^3 + 5x \leqslant 6x^2$;
2. $|x-2| + |x-1| < 3$;

16 b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\left|1-2x^2\right| \geqslant 3$;
2. $x^2 + |x-1| - |2x+1| < 0$;

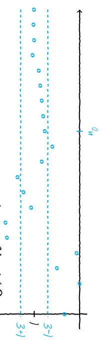


$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geqslant n_0,|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$



$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

$\zeta_k=|a|^{1/n}e^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$

1.2 Trigonométrie

17 (a) Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2\sin x\leqslant\sqrt{3},\quad 1+2\sin x\geqslant 0,\quad 2\sin^2 x-5\sin x+2>0.$$

18 (b) Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ les inéquations suivantes :

$$2\cos(x)\geqslant 1,\quad |\sin(x)|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos^2 x>1.$$

.

19 (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x=\frac{1}{2}$;
2. $2\sin^2 x=1$;
3. $\sin^2 x+3\cos x+\frac{3}{4}=0$;
4. $\sin(2x)=\cos(x)$.

20 (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $2\cos x=\sqrt{3}$;
2. $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sqrt{2}$;
3. $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$;
4. $\tan(x)=\sqrt{3}$.

1.3 Produits et sommes

21 (a) Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$\begin{aligned}A_n&=2^5+3^5+4^5+\cdots+n^5,\\ B_n&=2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n),\\ C_n(x)&=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n,\\ D&=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{3^{101}}\right).\end{aligned}$$

22 (b) Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$\begin{aligned}A_n&=4+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1},\\ B_n(x)&=2x+4x^2+8x^3+\cdots+1024x^{10},\\ C_n&=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n,\\ D_n&=\left(2+3^2\right)\times\left(2+3^4\right)\times\left(2+3^6\right)\times\cdots\times\left(2+3^{84}\right).\end{aligned}$$

23 (a) Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

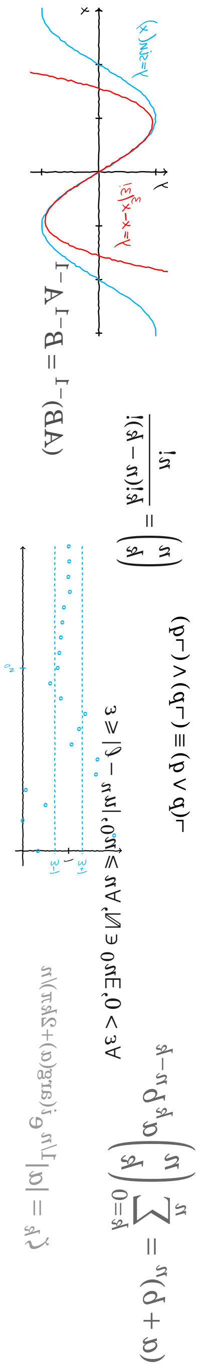
1. $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$;
2. $\sum_{k=0}^{n}2^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{3}{5^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(3k-2)$;

24 (b) Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)$;
2. $\sum_{k=0}^{n}3^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n}\frac{3^i}{2^{3i+2}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(2k-\frac{5}{7^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(2k-3)$;

25 (a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul : $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$. Calculer alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

26 (b)
1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3-k^3$.
2. En déduire pour $n\in\mathbb{N}$ la somme : $\sum_{k=1}^{n}k^2$.
3. Calculer : $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)$.



27 [a] [b] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{j=1}^{2n} 3^j \binom{2n}{j}.$$

2. Pour travailler seul

28 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

29 En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

30 Soit $x \in [0, \pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n \sin(x).$$

31 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} |k-n|$;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$;
4. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} x^j$ où $x \in \mathbb{R}$;
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, où $n \geqslant 2$.

32 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n.

Suites réelles

1. Les essentiels

33 [a] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1; \quad u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n. \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad \text{et} \quad b_n = 2^n u_n.$$

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

34 [b] On pose :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier n.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n.

35 [a] On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.

2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

36 b Soit $(s_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

1. Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

a **37** b *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \geqslant \ln n + \frac{1}{n}$. *Indication :* $H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \leqslant 1 + \ln n$. *Indication :* $H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$

   (a) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

a **38** Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$
2. $u_n = \frac{2n+3}{3n-5}$
3. $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$
4. $u_n = 5n + 7 - n^2$
5. $u_n = n - \ln n$
6. $u_n = n + 5\cos n$
7. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

39 b Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{n^2 - n + 2}$
3. $u_n = n - \exp(n)$
4. $u_n = 2\sin(n) - n$
5. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
6. $u_n = \dfrac{2n^5}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{n!}{3^n}$

a **40** Démontrer les relations ci-dessous :

$$n^3 + 3n \sim n^3, \quad n - \ln(n) \sim n, \quad 3\ln(n) \not\sim \ln(n).$$

41 b Démontrer les relations ci-dessous :

$$2n^2 - n \sim 2n^2, \quad \exp(2n) + n^3 + n! \sim n!, \quad 2n^2 \not\sim n^2.$$

a **42** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

43 b Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

2. Pour travailler seul

44 Quelle est la raison d'une suite géométrique $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = 150\ ?$$

45 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + \pi. \end{cases}$$

1. Soit α un nombre réel. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

46 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

47 *Médian 2014.* 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

(a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1, \end{cases}$$

où $\lfloor b_n \rfloor$ désigne la partie entière de b_n. On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant b_n < 0.$$

(b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n.

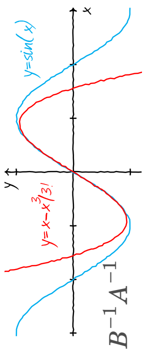
(c) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(e) Démontrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k$$

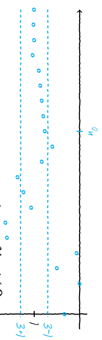
est convergente.



$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$



$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geqslant n_0,|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

$\zeta_k=|a|^{1/n}e^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$

Ensembles et applications

1. Les essentiels

48 (a) (b) On considère l'ensemble $E=\{a;b;c\}$. Peut-on écrire

1. $a\subset E$?
2. $a\in E$?
3. $\{a\}\subset E$?
4. $\{a\}\in\mathscr{P}(E)$?
5. $\varnothing\subset E$?
6. $\varnothing\in E$?
7. $\{\varnothing\}\subset E$?
8. $\{\varnothing\}\subset\mathscr{P}(E)$?
9. $\{a\}\in E$?

49 (a) Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier et déterminer les bijections réciproques le cas échéant.

1. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{N}\\ n&\mapsto&n+1\end{array}$
2. $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}&\to&\mathbb{Z}\\ n&\mapsto&n+1\end{array}$
3. $h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto&(x+y,x-y)\end{array}$
4. $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto&(x,y^2)\end{array}$

50 (b) Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier et déterminer les bijections réciproques le cas échéant.

1. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{N}\\ n&\mapsto&2n\end{array}$
2. $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}&\to&\mathbb{Z}\\ n&\mapsto&n-1\end{array}$
3. $h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto&(2x+y,x-2y)\end{array}$
4. $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto&(x+y,xy)\end{array}$

51 (a) Soient $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&e^x\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^2\end{array}$.

Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $g([-1;4])$.

52 (b) Soient $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^\star&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\ln(x)\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\sin(x)\end{array}$.

Déterminer les ensembles $f(]1,+\infty[)$ et $g([-\pi;\pi/6])$.

2. Pour travailler seul

53 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{a\})\big)$.

54 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

1. $A\subset B\iff A\cup B=B$
2. $A=B\iff A\cap B=A\cup B$

55 On considère deux applications $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$f(n)=2n,\quad g(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ n & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. g est-elle bijective ?
3. Déterminer $(g\circ f)(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. Démontrer que $f\circ g\neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f\circ g)(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

56 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto&(2x-y,x+y)\end{array},\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}&\to&\mathbb{C},\\ z&\mapsto&\sqrt{2}\bar{z}+iz\end{array},$$

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(\mathbb{N})&\to&\mathscr{P}(\mathbb{N})\\ X&\mapsto&\{1;2;3\}\cup X\end{array}.$$

57 *Final 2017.* Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\longrightarrow&\mathbb{N}\\ n&\longmapsto&\begin{cases}n+1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{array}$.

Calculer $f\circ f$. En déduire que f est bijective.

Limites et continuité

1. Les essentiels

58 (a) Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dots$

1. $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\dfrac{x-\ln x}{x}$
3. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
4. $\dfrac{\sin(3x)}{x}$

59 (b) Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dots$

1. $\dfrac{1}{x^2}+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\dfrac{\cos x}{x^2}$
3. $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}$
4. $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

60 (a) Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

61 (b) Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2+2x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

62 (a)(b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right).$$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2)-\ln(1+e^{-2x}) \\ &= \ln(2)+2x-\ln\left(1+e^{2x}\right). \end{aligned}$$

2. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

63 (a) Soit $k \in \mathbb{R}$, k fixé. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1, \\ -2x+k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

64 (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+b & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.

65 (a)(b) Étudier la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

66 (a) Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $x^5-x^4+1=0$ dans $I=[-1;0]$,
2. $\tan x = x+1$ dans $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

67 (b) Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $e^x = 2 - x$ dans $\mathbb{R}$,
2. $\sin(x) + 1 = x$ dans $I = \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$,

68 Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f([0;1]) \subset [0;1]$. Démontrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.

Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

2. Pour travailler seul

69 Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Démontrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1 - x}{x + x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} - x$
3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{5x}$
4. $f(x) = -x e^{-x} + 1 - 3x$

70 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2 + 1\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1\right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$.

71

1. Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2}$.
2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-1;1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

72 Étudier si les fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}^*$ sont prolongeables par continuité en 0.

1. $g(x) = \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$
2. $h(x) = \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\varphi(x) = \dfrac{|\sin(x)|}{x}$
4. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

73 *Final 2012.*

1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$\begin{array}{rccl} g & : &]-1, +\infty[& \to \quad \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \quad 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10. \end{array}$$

2. Démontrer que g bijective de $]-1, +\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.
3. En déduire que l'équation $10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10 = 0$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
4. On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
6. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.