S'exprimer en mathématiques

1 Étant données P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant les tables de vérité que

$$P \text{ ou } [Q \text{ et } R] \equiv [P \text{ ou } Q] \text{ et } [P \text{ ou } R].$$

2 Vérifier que l'assertion $[P \text{ et } (P \Rightarrow Q)] \Longrightarrow Q$ est une tautologie.

3 On définit les assertions suivantes :

- D : « Je dors. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »
- T : « Je tousse. »

Exprimer sous forme symbolique les affirmations ci-dessous.

1. Je dors et je rêve, mais je ne tousse pas.
2. Quand je dors, je ne parle pas.
3. Chaque fois que je dors, je parle mais je ne tousse pas.
4. Si je dors ou si je parle, alors je tousse.
5. Il suffit que je dorme pour que je rêve.
6. Une condition nécessaire pour que je dorme et que je parle est que je rêve.
7. Je dors et je parle si et seulement si je rêve ou je tousse.
8. Soit je dors et je rêve, soit si je tousse alors je ne parle pas.

4 Pour chacune des assertions suivantes, écrire la négation :

$$(P_1) : \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leqslant a$$

$$(P_2) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leqslant y \Rightarrow x \leqslant y - 1).$$

Ces assertions sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

5

1. On considère l'assertion suivante :

$$P_1 : \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant M.$$

   (a) Écrire la négation de P_1.

   (b) L'assertion P_1 est-elle vraie ? Le démontrer.

2. Mêmes questions avec l'assertion :

$$P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 2\right).$$

6

1. Écrire la négation de l'assertion : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [M, +\infty[,\ |e^{-x}| \leqslant \epsilon$.
2. Soient a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On considère l'assertion :

$$\mathscr{A} \ : \ f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$$

   (a) Écrire la contraposée de $\mathscr{A}$.

   (b) Écrire la négation de $\mathscr{A}$.

   (c) On suppose dans cette question que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

   L'assertion $\mathscr{A}$ est-elle vraie ? Justifier.

7 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) = C$,
2. $\forall x \in I, \quad \left(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\right)$,
3. $\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad \left(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\right)$,
4. $\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant 0$.

8 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$;
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$;
3. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$;
4. $\forall x \in I,\ (f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.

9 Pour chacune des assertions P_i, écrire la négation de P_i et préciser, en justifiant la réponse, si P_i est vraie ou fausse.

- P_1 : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \leqslant 0$.
- P_2 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$.
- P_3 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
- P_4 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$, est décroissante.
- P_5 : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \left(n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon\right)$.

10 Soit n un entier naturel. Démontrer que $n^2 + 3n$ est pair.

11 Démontrer que la somme de deux entiers de même parité est un nombre pair.

12 Soit a un nombre réel vérifiant : $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.
Indication : utiliser la contraposée.

13 *« Si je dors, alors je rêve et je ne ronfle pas. Si je ne ronfle pas, alors je parle. Je ne parle pas. »* Que peut-on en déduire ?

☐ Je ronfle.	☐ Je ne rêve pas.
☐ Je ne ronfle pas.	☐ Je dors et je ronfle.
☐ Je ne dors pas.	☐ Je ne rêve pas et je ne dors pas.

14 On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que f garde un signe constant si, et seulement si, $a = 0$.

15 Soient $\mathscr{P} = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $\mathscr{I} = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers naturels pairs et des entiers naturels impairs. Démontrer que $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \emptyset$.

16 On cherche à déterminer en raisonnant par analyse-synthèse toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe. Prouver que $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Conclure.

17 Déterminer en raisonnant par analyse-synthèse toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

18
1. Rappeler la définition d'un nombre premier.
2. Quelle est la valeur de vérité de l'assertion : « tous les nombres premiers sont impairs » ?
3. Démontrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers, alors l'entier $N = 1 + p_1 p_2 \ldots p_r$ n'est divisible par aucun des entiers p_i. On pourra raisonner par contraposition.
4. Utiliser la question précédente pour démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.
On admettra que tout entier supérieur ou égal à 2, admet au moins un diviseur premier.

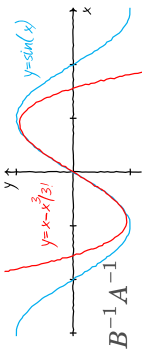
19
1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) + f(-x), \quad h(x) = f(x) - f(-x).$$
Étudier la parité des fonctions g et h.
2. Démontrer, par analyse-synthèse, que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, s'écrit de manière unique, comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

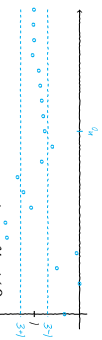
20 Soient P et Q deux assertions et :

$$\mathscr{A} \ : P \Longrightarrow Q$$

Rappeler :
1. La négation de $\mathscr{A}$.
2. La contraposée de $\mathscr{A}$.
3. La réciproque de $\mathscr{A}$.

Quel(s) lien(s) y a-t-il entre les différents points ci-dessus ($\mathscr{A}$, sa contraposée, sa négation et sa réciproque) ?





21 Encadrer $x+y, x-y, xy$ et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;-2]$.

22 Déterminer un encadrement de $\dfrac{x+\ln x}{1+x^2}$ lorsque $x \in [1;3]$.

23 Soient a, b et c des nombres réels positifs. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; en déduire que $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$;
2. si $a>0$ alors $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$;
3. $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$;
4. si $a>0$ et si $b>0$ alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$;
5. si $a>0$ et si $b>0$ alors $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

24 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 1 + f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\frac{x}{x-4} \geqslant \frac{1}{x+5}$;
2. $x^3+5x \leqslant 6x^2$;
3. $|x-2|+|x-1| < 3$;
4. $\left|1-2x^2\right| \geqslant 3$;
5. $x^2+|x-1|-|2x+1| < 0$;
6. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x-2|$;
7. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-2$;
8. $\sqrt{1-x^2} \leqslant m-x$ où m est un paramètre réel.

27 Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2\cos x \leqslant \sqrt{3}, \quad 1+2\sin x \geqslant 0, \quad \cos^2 x > 1, \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0.$$

28 Résoudre dans $[-\pi,\pi[$, l'inéquation : $|\sin(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

29 Soit $x \in [0,\pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n\sin(x).$$

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$;
2. $\sin(2x) = \cos x$;
3. $\tan x = -\sqrt{3}$;
4. $2\sin^2 x = 1$;
5. $4\sin x\cos x = 1$;
6. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$;
7. $1+\sin x - 2\sin^2 x = 0$;
8. $\sin^2 x + 3\cos x + \frac{3}{4} = 0$;
9. $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$;
10. $3\tan^2 x = 1$;
11. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

31 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 2^5+3^5+4^5+\cdots+n^5,$$
$$B_n = 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n),$$
$$C_n(x) = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n,$$
$$D = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{3^{101}}\right).$$

32 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{3}{5^k}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\sqrt{3^k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}|k-n|$
7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
8. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} x^j$ où $x \in \mathbb{R}$
9. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, où $n \geqslant 2$.

33 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

2. En déduire, pour $n \geqslant 2$, une simplification de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)$.

34 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul : $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

35 Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3 - k^3$.
2. En déduire (sans raisonner par récurrence) la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Calculer : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1)$.

36 Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \sum_{k=1}^{n} k!\,k = (n+1)! - 1.$$

Indication : pour une des deux méthodes, utiliser une démarche analogue à celle des exercices 34 et 35.

37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{j=1}^{2n} 3^j \binom{2n}{j}.$$

38 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}\,,\ ]0,1[\cap \mathbb{Q}\,,\ \mathbb{N}\,,\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

39 Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{n-1/n}{n+1/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble E admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

40 Déterminer majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure (lorsqu'ils/elles existents) de

$$A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\},$$

où $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

41 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n.

42 L'objectif de cet exercice est d'établir une formule sommatoire pour la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$, où n désigne un entier naturel non nul et x un nombre réel différent de 1.

1. Développer puis simplifier l'expression $(1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.
2. Soit n un entier naturel non nul fixé. On pose pour tout réel $x \neq 1$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

   (a) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (b) Calculer de deux façons différentes $f_n'(x)$.
   (c) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.
3. *Application* : déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

Ensembles et applications

1 Pour s'entraîner

43 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{a\})\big)$.

44 On considère l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. Peut-on écrire

1. $a \subset E$?
2. $a \in E$?
3. $\{a\} \subset E$?
4. $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$?
5. $\emptyset \subset E$?
6. $\emptyset \in E$?
7. $\{\emptyset\} \subset E$?
8. $\{\emptyset\} \subset \mathscr{P}(E)$?
9. $\{a\} \in E$?

45 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$,
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$,
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$,
4. $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

46 Soient E un ensemble et f une application de $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties X et Y disjointes de E,

$$(\star) \quad f(X \cup Y) = f(X) + f(Y).$$

1. Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
   Indication : exprimer B comme la réunion de deux parties disjointes de E (faire un dessin !).
3. Soient A et B deux parties quelconques de E. En écrivant $A \cup B$ comme la réunion de deux parties disjointes de E (*faire un dessin pour s'aider dans le cas où $A \cap B \neq \emptyset$*), déduire de l'égalité $(\star)$ et de la question précédente que :
$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

47 Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $g^{-1}([-1;4])$.

48 Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Démontrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. Démontrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

49 Soient $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0 \text{ et } y > 0\right\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. Calculer $f(0,1)$ et $f(1,0)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $f^{-1}(A)$.
3. A-t-on $f\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$?

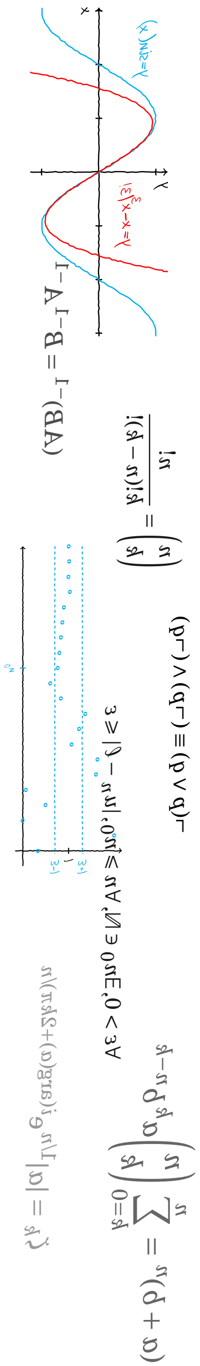
50 On considère deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. g est-elle bijective ?
3. Déterminer $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

51 Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier.

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y^2) \end{array}$



52 Démontrer que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie ci dessous est bijective :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication : commencer par étudier le signe de $f(n)$.

53 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y) \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ z & \mapsto & \sqrt{2}\bar{z} + iz \end{array},$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ X & \mapsto & \{1;2;3\} \cup X \end{array}.$$

54 On considère les quatre parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 3k\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 12k\},$$
$$C = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 15k\}, \qquad D = \{n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 100\}.$$

1. Définir chaque ensemble précédent à l'aide d'une phrase en français.
2. Donner la liste des éléments de $B \cap D$.
3. Déterminer $A \cup B \cup C$.
4. Déterminer $A \cap B \cap C$ et donner la liste des éléments de $D \cap B \cap C$.

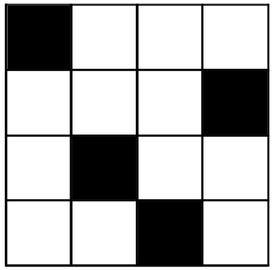
55 Un sondage effectué auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :

- à la question «mangez-vous 5 fruits et légumes par jour ?», 50 personnes répondent oui ;
- à la question «êtes-vous sportif ?», 80 personnes répondent oui ;
- à la question «êtes-vous un sportif qui mange 5 fruits et légumes par jour ?», 35 personnes répondent oui.

Combien de personnes ne sont pas sportives et ne mangent pas 5 fruits et légumes par jour ?

56 *Dénombrements élémentaires.*

1. Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de 4 chiffres où le chiffre 9 figure une fois et une seule ?
   Indication : on pourra dénombrer ceux qui commencent par 9 puis ceux qui commencent par un des entiers de 1 à 8.
2. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un «paquet». Combien de «paquets» contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?
3. Un damier carré comporte 16 cases. On dispose de 4 jetons identiques que l'on place chacun sur une case du damier.
   (a) De combien de manières différentes peut-on placer les 4 jetons sur les 16 cases ?
   (b) De combien de manières peut-on placer les 4 jetons sachant qu'il doit y avoir un jeton et un seul sur chaque ligne et chaque colonne ?

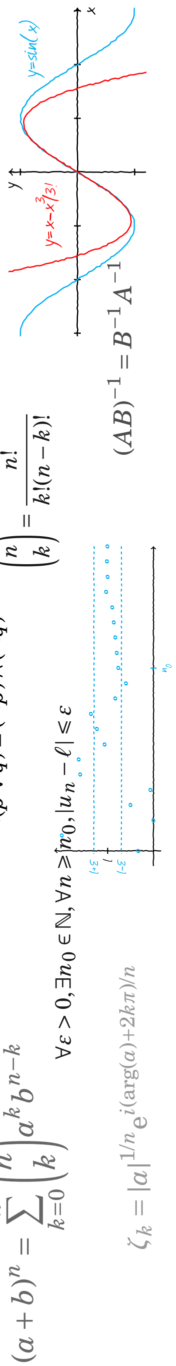


57 Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. On pose $E = \{1,2,3,\ldots,p\}$ et $F = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de E ?
2. Quel est le nombre d'applications de E dans F ?
3. Quel est le nombre de bijections de E sur E ?
4. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F ?
   Indication : pour construire une application strictement croissante f de E dans F on commence par choisir p éléments distincts de F qui seront les images par f des p éléments de E.

58 *Final 2017.* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}.$

Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective.



2 Pour approfondir

59 Soit $f:E\to F$ une application. Soient A et B deux parties de E. Démontrer que :

1. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,
2. $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

60 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A\cup(A\cap B)=\dots$

   (a) A (b) B (c) $A\cap B$ (d) $A\cup B$.

2. On pose $I=\{x\in\mathbb{R}/x^2<4\}$. Alors $I\cap\mathbb{Z}=\dots$

   (a) $\{-1;1\}$ (b) $\{0;1;2\}$ (c) $\{0;-1;1\}$ (d) $]-2;2[$.

3. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a,b\}))$ est égal à …

   (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16.

4. On lance 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de triplets différents ?

   (a) $3!$ (b) 3^6 (c) 6^3 (d) A_6^3.

5. Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

   (a) 87^{100} (b) $\binom{100}{87}$ (c) -87^{100} (d) $-\binom{100}{13}$.

6. Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n\in\mathbb{N}^\star$. A et B sont deux parties de E, de cardinaux respectifs p et q tels que $1\leqslant p\leqslant q\leqslant n$. On suppose que $A\subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A\subset X\subset B$?

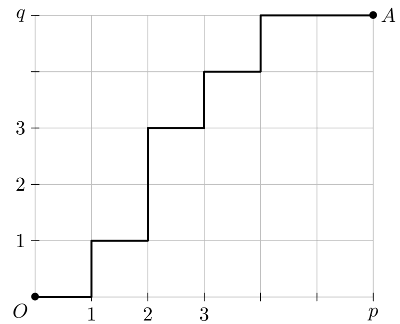
   (a) 2^q (b) 2^q-2^p (c) 2^{q-p} (d) $\binom{q}{p}$.

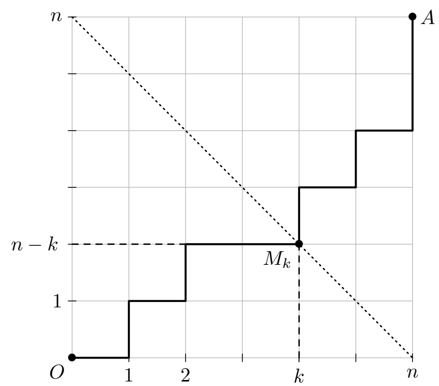
61 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, on se donne le point A de coordonnées (p,q) où p et q sont deux entiers naturels non nuls. On trace les droites d'équations $x=i$ et $y=j$ pour tous entiers i et j tels que $0\leqslant i\leqslant p$ et $0\leqslant j\leqslant q$. On appelle «chemin $O-A$» tout chemin qui part du point O pour arriver au point A en suivant les lignes du quadrillage, et qui ne comporte que des déplacements vers la droite ou vers le haut. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des chemins $0-A$.

1. Justifier que $\mathrm{Card}(\mathscr{E})$ (le nombre de chemins $O-A$) est donné par :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{E})=\binom{p+q}{p}.$$

Indication : pour construire un chemin $O-A$ il faut effectuer p déplacements vers la droite et q vers le haut.





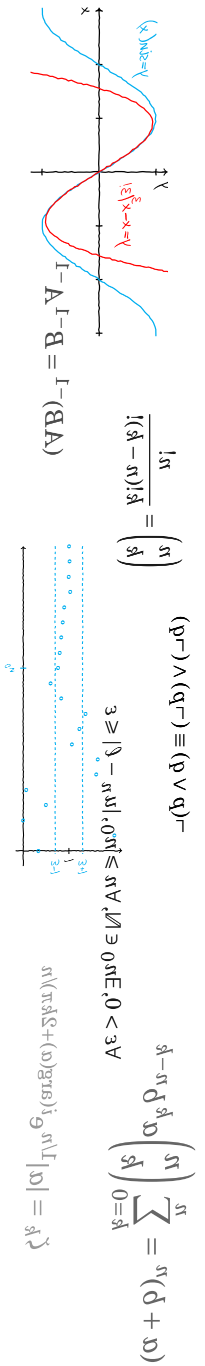
2. On suppose maintenant que $p=q=n$ et on cherche à calculer $\mathrm{Card}(\mathscr{E})$ par une autre méthode. Pour tout entier $k\in[\![0,n]\!]$, on note M_k le point de coordonnées $(k,n-k)$ et $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des chemins $O-A$ passant par le point M_k.

   (a) En utilisant la question précédente, calculer le nombre de chemins $O-M_k$.

   (b) Calculer de la même manière le nombre de chemins M_k-A.

   (c) En déduire que $\mathrm{Card}(\mathscr{E}_k)=\binom{n}{k}^2$, puis que $\mathrm{Card}(\mathscr{E})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$,

3. En utilisant les questions 1 et 2, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.



Les nombres complexes

1 Pour s'entraîner

62 Écrire sous forme algébrique :

1. $(1+i)(1-2i)$,
2. $\dfrac{1-i}{3+2i}+2\dfrac{1+3i}{2-3i}$,
3. $(1+i\sqrt{3})^3$,
4. $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4$.

63 Soient z et z' deux nombres complexes tels que $|z|=|z'|=1$ et $zz'\neq -1$. On pose $Z=\dfrac{z+z'}{1+zz'}$. Démontrer que Z est un nombre réel.

64 Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit B le point d'affixe $6-12i$.
On appelle f l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=1-z^2.$$

1. Déterminer les antécédents de B par f.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes.
3. (a) Démontrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image par f.
   (b) Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses $(O;\vec{u})$?
4. Démontrer que l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2 est un cercle que l'on déterminera.

65
1. Donner $f(\mathbb{R})$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est définie par $f(t)=e^{it}$.
2. On note $\mathbb{U}=\left\{e^{i\theta}\in\mathbb{C},\theta\in\mathbb{R}\right\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit l'application

$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & z+\frac{1}{z}.\end{array}$$

Déterminer $g(\mathbb{U})$.

66 Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant :

1. $|z|=|z-1|=\left|\dfrac{1}{z}\right|$,
2. $\arg(z+1)\equiv\arg(z-i)\,[2\pi]$,
3. $|z+1|=|z|+1$,
4. $z+\overline{z}=|z|$.

67 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Pour tout nombre complexe z, on note M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. les points M, N et P soient alignés ;
2. les points M, N et P forment un triangle équilatéral.

68 Simplifier, pour tout $\theta\in]-\pi,\pi[$, l'expression $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

69 On pose $E=\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on considère l'application

$$f:\begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{C}^\star\\ z & \mapsto & \frac{2}{(z-1)^2}.\end{array}$$

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=\frac{1}{4-3i}$.
3. Démontrer que $f(E)=\mathbb{C}^\star$. *On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha\in\mathbb{C}^\star$ par f.*
4. Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<2\pi$.
   (a) Démontrer que $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(e^{i\theta})$.
5. On considère l'ensemble $\Delta=\{z\in\mathbb{C},\ \Re e(z)=1\}$. Démontrer que $f(\Delta\setminus\{1\})=]-\infty,0[$.

70 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

1. $z^2+z+1=0$,
2. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où $\theta\in\mathbb{R}$,
3. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
4. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$,
6. $2z^4-(2+i)z^2+1-i=0$.

71 Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<\pi$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^2+\frac{1}{z^2}=2\cos\theta.$$

72 Déterminer les racines

1. carrées de $11+4i\sqrt{3}$,
2. cubiques de $8i$,
3. sixièmes de -27,
4. cubiques de $4(\sqrt{3}-i)$.

73 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=4\sqrt{2}(1+i)$ d'inconnue z.

74 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $\quad 1-\mathrm{e}^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

75 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

1. Calculer la somme et le produit des n racines n-ièmes de l'unité.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

76 Soient $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$ et ω une racine n-ième de l'unité, $\omega\neq 1$. On pose :

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

77 Soit $x\in\mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(x)\cos(x)$,
2. $\sin(2x)\cos(3x)$,
3. $\sin(2x)\cos^3 x$,
4. $\cos^2 x.\sin^2 x$,
5. $\cos^3 x+2\cos^2 x$,
6. $\sin^2(3x)+\cos^2(2x)$.

78 Soit $\theta\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

79 On définit l'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ par

$$\exp(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y),\qquad \text{où } z=x+iy \text{ avec } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction exp.
2. Pour $\alpha\in\mathbb{C}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\exp(z)=\alpha$.
3. Déterminer $\exp(\mathbb{C})$.

80 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^z=1$,
2. $\mathrm{e}^z=2i$,
3. $\mathrm{e}^z=\sqrt{3}+3i$,
4. $\mathrm{e}^z-2\mathrm{e}^{-z}+2=0$,
5. $\mathrm{e}^{2z}=1+i\sqrt{3}$,
6. $\mathrm{e}^z=-1$,
7. $\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{z'} & = & 2\\ \mathrm{e}^{z+z'} & = & 2\end{array}\right.$.

81

1. Démontrer que

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \overline{\mathrm{e}^z}=\mathrm{e}^{\overline{z}}.$$

2. A-t-on $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{|z|}$? Si non, existe-t-il une inégalité générale entre ces deux nombres réels ?

2 Pour approfondir

82 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On pose :

$$\omega=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

1. Justifier que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$.
2. Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
3. Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.
5. (a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte du réel $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
6. On note K, A et B les points d'affixes respectives $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}i$ et ω. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre K passant par A.
   (a) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
   (b) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(O;\vec{u})$ en deux points H et H' (H étant d'abscisse positive). Montrer que H a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   Indication : utiliser la valeur trouvée à la question 5a.
   (c) En déduire une construction géométrique simple du point B.
   (d) Achever la construction du pentagone régulier de centre O dont B est un sommet.

83 On considère le nombre complexe

$$u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

On pose encore $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. (a) Simplifier u^7.
   (b) Calculer la somme $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$.
   (c) Calculer le produit $uu^2u^3 \ldots u^6$.
2. (a) Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
   (b) Donner la valeur de $S + T$ et calculer $S \times T$.
   (c) Démontrer que la partie imaginaire de S est positive.
   (d) En déduire les valeurs exactes de S et T.
3. Calculer la somme :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

84 Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts, tels que $|a| = |b| = |c|$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On souhaite démontrer que l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) du triangle ABC a pour affixe $a+b+c$.

1. Démontrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $|z_1| = |z_2|$ et $z_1 \neq -z_2$, alors $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ est un nombre imaginaire pur.
2. On note H le point d'affixe $a + b + c$. Exprimer à l'aide de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. On suppose que $b + c \neq 0$.
   (a) Que vaut l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}})$?
   (b) En déduire que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A.
   (c) Démontrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
4. Que se passe t-il si $b + c = 0$?

85 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

86 *Final 2016.* Soit $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose pour tout $z \in E$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Démontrer que : $\forall z \in E,\ 1 - f(z) \neq 0$.
2. f définit ainsi une application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}.$$

   Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Démontrer que : $\forall z \in E,\ 1 - |f(z)|^2 = 4\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}$.
4. On pose $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
   (a) Rappeler la définition de l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant la question 3, démontrer que $f(\mathbb{R}) \subset U \setminus \{1\}$.
   (c) Soit $\alpha \in U \setminus \{1\}$. Puisque f est bijective, il existe un unique nombre complexe $z \in E$ tel que $\alpha = f(z)$. Toujours en utilisant la question 3, démontrer que $z \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire l'ensemble $f(\mathbb{R})$.

Suites numériques

1 Pour s'entraîner

87 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=-1; \quad u_1=1; \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n \quad \text{et} \quad b_n=2^n u_n.$$

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

88 On pose :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+3u_n}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $u_n>0$ pour tout entier n.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad v_n=\dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n.

89 Soit (u_n) une suite géométrique telle que :

$$u_0=90 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=150.$$

Quelle est sa raison ?

90 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=3 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=-2u_n+\pi. \end{cases}$$

91 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad H_{2n}-H_n\geqslant\frac{1}{2}$.
2. En déduire la limite de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

92 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.
2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

93 *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k\geqslant1$,

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $H_n\geqslant\ln n+\frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}$.
2. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $H_n\leqslant1+\ln n$. *Indication* : $H_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n\geqslant1$,

$$v_n=H_n-\ln n \quad \text{et} \quad w_n=v_n-\frac{1}{n}.$$

   (a) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

(b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

94 Soit $(s_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

1. Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

95 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$,
2. $u_n = \frac{2n+3}{3n-5}$,
3. $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$,
4. $u_n = 5n+7-n^2$,
5. $u_n = n - \ln n$,
6. $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$,
7. $u_n = n + 5\cos n$,
8. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$,
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
10. $u_n = \frac{3^n}{n^3}$,
11. $u_n = \frac{n!}{5^n}$,
12. $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,
13. $u_n = n^2 - 2^n$.

96 Trouver un équivalent simple pour chacune des suites :

- $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$,
- $b_n = (n+1)^n - n^n$,
- $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
- $d_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

97 Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel x_n appartenant à $[n\,,n+1[$ solution de l'équation :

$$x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{x^2}.$$

Donner un équivalent de x_n, puis un équivalent de $x_n - n$.

98 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

99 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

100 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

2 Pour approfondir

101 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = a\,; \quad v_0 = b; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < v_n$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
3. Démontrer que les deux suites u et v sont convergentes.
4. Calculer de deux façons différentes la limite du produit $u_{n+1}v_{n+1}$. En déduire la limite de u et v.

102 *Médian 2012.*

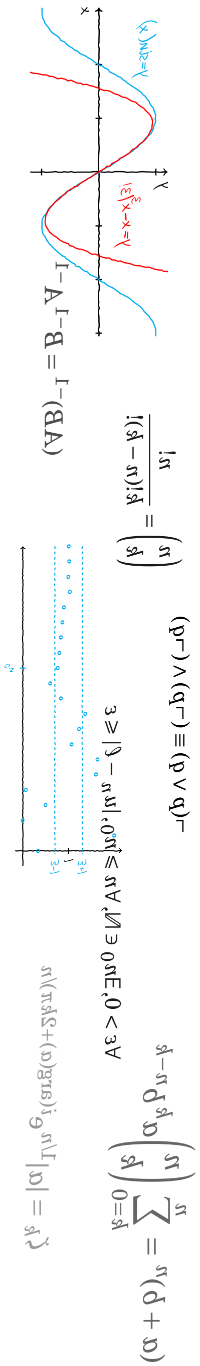
1. Soient x et y deux réels positifs. Démontrer que $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.
2. Soient x et y deux réels vérifiant $0 < x \leqslant y$. Démontrer les inégalités :
$$x \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y \qquad \text{et} \qquad x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y.$$
3. Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 < b_0$. On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$
   (a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
   (b) Démontrer que (b_n) est une suite décroissante.
   (c) Démontrer que (a_n) est une suite croissante.
   (d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes, et qu'elles admettent la même limite, que l'on notera ℓ.
4. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_0 = 1$ et que $b_0 = 5$. Justifier que
$$\sqrt{a_0 b_0} \leqslant \ell \leqslant \frac{a_1 + b_1}{2}.$$
En déduire la partie entière de la limite ℓ.

103

1. On admet le résultat suivant : « Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de nombres réels qui converge vers 0 alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k$ converge vers 0. » Prouver alors le lemme de Cesaro : « Si une suite $(x_n)_n$ converge vers un nombre réel ℓ, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \ell$ ».
Indication : utiliser la suite $(t_n)_n$ définie par $t_n = x_n - \ell$.
2. On considère la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}. \end{cases}$$
   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Démontrer que $(u_n)_n$ est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Démontrer que $\ell = 0$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$.
4. En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}}\right) \sim_\infty n$. Conclure.
5. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Vérifier que $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$. La suite $(S_n)_n$ est-elle convergente ?

104 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Expliciter S_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite de terme général S_n/n ?



Limites et continuité

1 Pour s'entraîner

105 Démontrer, en utilisant la définition de la limite que $\lim\limits_{x\to 2}(4x+5)=13$.

106 Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. Démontrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à cette asymptote.

1. $f(x)=\dfrac{\ln(x)+1-x}{x+x^2}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-x$
3. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{5x}$
4. $f(x)=-x\,\mathrm{e}^{-x}+1-3x$
5. $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$.

107 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dots$

1. $x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\dfrac{1}{x^2}+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\dfrac{x-\ln x}{x}$
4. $\dfrac{\cos x}{x^2}$
5. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
6. $\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
7. $\dfrac{\sin(3x)}{x}$
8. $\dfrac{\mathrm{e}^{5x}-1}{2x}$
9. $\dfrac{\cos x-1}{x^2}$.

108 Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction g définie par $g(x)=\dots$

1. $5x^3-3x^2+4$
2. $\dfrac{x^3}{1+x+x^2}$
3. $\dfrac{\cos x}{1-x}$
4. $\dfrac{1+x\ln x}{x}$
5. $x+\sin x$
6. $x\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7. $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
8. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$
9. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
10. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x}-1}$
11. $\dfrac{\sin x}{\ln x}$.

109 Déterminer pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

110 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x-x^2+1\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2-x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
9. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}-1\right)$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x^2+2x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$.

111 Démontrer que la fonction $f : x\longmapsto\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en zéro.

112 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell>0$. Démontrer qu'il existe $\delta>0$ tel que si $0<|x-x_0|<\delta$ alors $f(x)\geqslant\ell/2$.
Indication : écrire la définition de « $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ » en prenant $\varepsilon=\ell/2$.

113 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x-\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right).$$

1. Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\ln 2-\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer les deux asymptotes à la courbe représentative de f.

114 Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x\longrightarrow+\infty$:

$\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1,\quad \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1},\quad x\ln(x+1)-(x+1)\ln x,\quad \lfloor x\rfloor\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right).$

115 Déterminer un équivalent simple au voisinage de zéro de :

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2},\quad \ln(\sin x),\quad \tan x-\sin x,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right).$$

116 Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ des expressions de x suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$
2. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x}+x^2}$
3. $f(x)=\dfrac{e^x+x+\ln(x)}{x+\sqrt{x}}$
4. $f(x)=\dfrac{1+x^\alpha}{1+x^\beta}$, pour $\alpha>0$ et $\beta>0$,
5. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$, pour $\alpha>0$ et $\beta>0$.

117 Étudier la limite éventuelle lorsque $x\to 1$ de : $\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$.

118 Étudier la limite éventuelle lorsque $x\to 0$ de : $\dfrac{e^{1/x}}{x}$.

119

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$.
2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon:[-1;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x\in[-1;1],\quad \sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)\quad\text{avec}\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

120 Soit $k\in\mathbb{R}$, k fixé. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geqslant 1,\\ -2x+k & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

121 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}x^2+b & \text{si } x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.

122 Étudier la continuité en 0 de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

123 La fonction h définie ci-dessous est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$h(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0,\\ x\,e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x>0.\end{cases}$$

124 Étudier si les fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}^*$ sont prolongeables par continuité en 0.

1. $g(x)=\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$
2. $h(x)=\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\varphi(x)=\dfrac{|\sin(x)|}{x}$
4. $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

125 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une seule solution dans l'intervalle indiqué. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée de cette solution à 10^{-3} près.

1. $x^5-x^4+1=0$ dans $I=[-1;0]$,
2. $e^x=2-x$ dans $\mathbb{R}$,
3. $\sin(x)+1=x$ dans $I=\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$,
4. $\tan x=x+1$ dans $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

126 Démontrer que l'équation...

1. $x^5+x^3+x+\sqrt{x}-1=0$ admet une unique solution réelle ;
2. $5x^7+3x^3+10x-3=0$ admet une unique solution réelle et que cette solution est strictement positive.

127 Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f_n(x)=\tan(x)-x-n.$$

1. Soit n un entier naturel fixé.

   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\pi/2} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\pi/2} f_n(x)$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f_n.
   (c) Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x)=0$, admet une solution unique dans l'intervalle I. On note a_n cette solution.
   (d) À l'aide de la calculatrice, proposer une valeur décimale approchée de a_{10} à 10^{-3} près.
   (e) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f_n(x)$.
2. La question 1.(c) permet de définir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Justifier que cette suite est bornée et calculer $f_n(a_{n+1})$ pour $n\in\mathbb{N}$.
   (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (c) Déterminer la limite de $\tan(a_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) Prouver que la suite (a_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

128 1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f([0;1])\subset[0;1]$. Démontrer qu'il existe $c\in[0;1]$ tel que $f(c)=c$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que :
$$\forall x\in[0;1],\quad f(x)>g(x).$$
Démontrer que :
$$\exists k>0,\ \forall x\in[0;1],\quad f(x)>k+g(x).$$

2 Pour approfondir

129 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue.
1. Démontrer que si f est périodique, alors f est bornée.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$.
   (a) Justifier qu'il existe des réels A et B tels que $A\leqslant 0\leqslant B$ et
$$\forall x\in]-\infty,A]\cup[B,+\infty[,\quad f(x)\geqslant f(0).$$
   (b) En déduire qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\geqslant f(x_0).$$

130 Soit $f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0;+\infty[$, positive et admettant pour limite 0 en $+\infty$.
1. Démontrer qu'il existe un réel $a>0$ tel que :
$$\forall x\in[a;+\infty[,\ 0\leqslant f(x)\leqslant 1.$$
2. En déduire que f est bornée sur $[0;+\infty[$.

131 *Final 2015.* On considère l'application :
$$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}\end{array},$$
où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.
1. Démontrer que f est continue en 1.
2. Soit $x\in]1;1,5]$. Simplifier :
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$
En déduire la dérivabilité éventuelle de f à droite de 1.
3. En s'inspirant de la question précédente, étudier la dérivabilité éventuelle de f à gauche de 1.
4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Polynômes

La notation $\mathbb{K}$ désignera l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

1 Pour s'entraîner

132 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $P\left(X^2\right)$ et le degré du du polynôme $P(X+1)-P(X)$.

133 Effectuer les divisions euclidiennes de

1. X^4+X^2+X+2 par X^2-3,
2. X^4-X^3+X-2 par X^2-2X+4,
3. $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2,
4. X^n+2X-2 par $(X-1)^2$ à l'aide du changement d'indéterminée $Y=X-1$ (pour $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$).

134 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.
   (a) Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
   (b) À quelle condition P est-il divisible par $(X-a)(X-b)$?
   (c) En déduire les restes des divisions euclidiennes de :
   (i) X^{50} par X^2-3X+2, (ii) $(X+\sqrt{3})^{17}$ par X^2+1.
2. (a) Calculer, en fonction de a, de $P(a)$ et de $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.
   (b) À quelle condition P est-il divisible par $(X-a)^2$?
   (c) En déduire le reste de la division euclidienne de X^4+X par $(X-1)^2$.

135 p et q sont deux nombres complexes tels que $q\neq 0$. On note a,b et c les solutions de l'équation d'inconnue z : $z^3+pz+q=0$. Exprimer en fonction de p et q les quantités suivantes : $a+b+c$, abc, $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$.

136 Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et R le reste de la division euclidienne de P par X^2+1.

1. Démontrer que $P(i)=R(i)$.
2. En déduire que X^2+1 divise P si et seulement si $P(i)=0$.

137 Soient p et q deux entiers naturels. Obtenir une relation entre coefficients binomiaux à l'aide de l'égalité : $(1+X)^p(1+X)^q=(1+X)^{p+q}$.

138 Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

1. $X+3$, 2. $X^2-6X-16$, 3. $(X-1)^2(X-2)$.

139 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-8z^2+23z-28=0$ sachant que la somme de deux de ses solutions est égale à la troisième.

140 Déterminer tous les polynômes P de $C[X]$ vérifiant, pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

1. $P(z_1+z_2)=P(z_1)P(z_2)$, *(étudier les racines)*
2. $P(z_1z_2)=P(z_1)+P(z_2)$, *(étudier le degré)*
3. $P(z_1z_2)=P(z_1)P(z_2)$, *(étudier les racines)*
4. $P(z_1+z_2)=P(z_1)+P(z_2)$. *(dériver)*

141 Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+1)=P(X)$.
Indication : étudier l'ensemble des racines de P.

142 Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2)=(X^2+1)P(X).$$

Indication : raisonner par analyse/synthèse. Si un tel polynôme P existe, donner son degré et calculer $P(1)$ et $P(i^2)$.

143 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que P divise Q. Démontrer que P^2 divise $P'Q-PQ'$.

144 Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Démontrer que le polynôme $P=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

145 Soient a et b deux nombres réels et $P = aX^{25} + bX^{24} + 1$. Déterminer a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

146 Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. En déduire la factorisation de $P(z)$.
3. En calculant $P(1)$, prouver que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$.
4. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

147 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

1. $X^3 - 3$,
2. $X^6 + 1$,
3. $X^8 + 1$,
4. $X^{12} - 1$,
5. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$,
6. $X^4 + X^2 + 1$.

148
1. Soit $P = X^2 - 4X + 5$. Décomposer le polynôme P en produits facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On considère le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X - 1 + 2i.$$

   (a) Démontrer que Q a une racine en commun avec P.

   (b) Effectuer la division euclidienne de Q par $X - \alpha$ où α est la racine commune à P et Q trouvée à la question précédente.

   (c) En déduire la décomposition de Q en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2 Pour approfondir

149 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 6 pour lesquels $P + 1$ est divisible par $(X-1)^3$ et $P + 2$ est divisible par X^4.

150 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, chacun des polynômes suivants :

1. $P(X) = X^{2n} - 1$,
2. $Q(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ où $\dfrac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

151 *Polynômes de Tchebychev.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Pour tout réel θ, factoriser l'expression $\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta]$.
2. Démontrer (sans chercher à le calculer) que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

   On démontrera que $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.
3. En déduire $T_n(0)$, $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
4. Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.
5. Préciser la parité et le coefficient dominant de T_n.
6. (a) Déterminer les racines de T_n et en déduire sa factorisation.

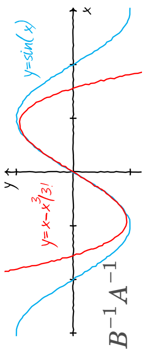
   (b) Calculer la somme s_n et le produit p_n des racines de T_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.
7. Établir que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2 T_n = 0$.

152 *Final 2016.* Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z - \alpha| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.

   (a) Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

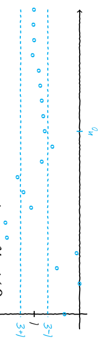
   (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$. Démontrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.



$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$



$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,|u_n-\ell|\leq\varepsilon$

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

$\zeta_k=|a|^{1/n}e^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$

Dérivation

1 Pour s'entraîner

153 Dans chacun des cas suivants :

- préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable,
- calculer sa dérivée f',
- déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f: x \mapsto \ln(\ln x)$, avec $a = \mathrm{e}$,
2. $f: x \mapsto x\ln x - x$, avec $a = 1$,
3. $f: x \mapsto \sqrt{5+\sin x}$, avec $a = 0$,
4. $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, avec $a = 0$,
5. $f: x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, avec $a = 2$,
6. $f: x \mapsto x^x$, avec $a = 1$.

154 Déterminer deux réels a et b de manière à ce que la fonction f définie ci-dessous sur $\mathbb{R}^+$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0;1], \\ a\,x^2 + b\,x + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

155 Étudier la dérivabilité des fonctions f, g, h et u définies par :

- $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$,
- $g(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$,
- $h(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $h(1) = 1$,
- $u(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$, si $x \neq 0$ et $u(0) = 0$.

156 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]0;\frac{\pi^2}{4}\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin\sqrt{x}}{1-\sin\sqrt{x}}}.$$

157 Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f (en ayant déterminé les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f) dans chacun des cas suivants :

1. $f: x \mapsto \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$,
2. $f: x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$,
3. $f: x \mapsto \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,
4. $f: x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$,
5. $f: x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$,
6. $f: x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$,
7. $f: x \mapsto x^x$.

158 Étudier la périodicité et la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x,$$

puis étudier les variations de f sur $[0;\pi]$.

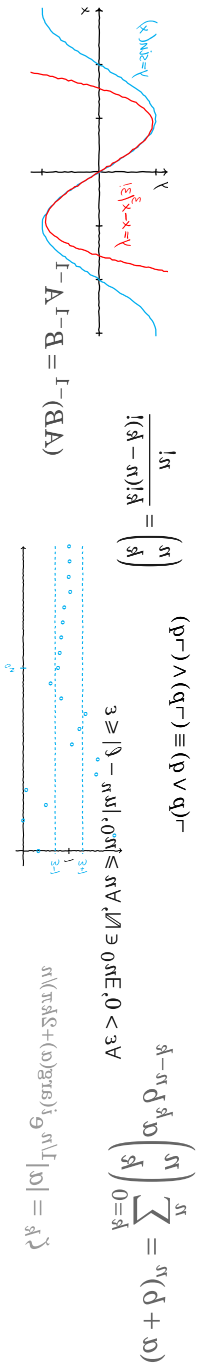
159 La fonction φ est définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1. Calculer $\varphi'(x)$. Démontrer que φ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$.

160 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x - 2$. Démontrer que f est bijective et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

161 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+x}$. On note Γ son graphe dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. Étudier la dérivabilité de f en zéro. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique Δ à Γ au voisinage de $+\infty$ et préciser la position relative de Γ par rapport à Δ.
4. Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Expliciter la réciproque f^{-1} de f.



162 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable en 0.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (1+x)^3$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g \circ f)'(0)$.

163 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ -x \leqslant \sin x \leqslant x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(1+x) < x$;
3. $\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$.

164

1. Démontrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

165 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Démontrer que : $\exists c \in]a,b[,\quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
   Indication : considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

166 Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

167 Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que le polynôme $X^{2n+1} + aX + b$ ne peut pas avoir deux racines réelles distinctes.
Indication : raisonner par l'absurde.

168

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \tan x - x \leqslant x(\tan x)^2.$$

2. On considère la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Étudier la parité de f.
   (b) Démontrer que f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
   (d) Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D} = \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

169 Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction ln sur $[k, k+1]$, démontrer que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente.

170 Calculer la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{5x},\quad g : x \mapsto \frac{1}{1-x},\quad h : x \mapsto x\mathrm{e}^x,\quad \varphi : x \mapsto \cos(2x).$$

2 Pour approfondir

171 Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que $f(I) \subset I$ et qu'il existe un réel $k \in [0;1[$ tel que

$$\forall x \in I,\quad |f'(x)| \leqslant k.$$

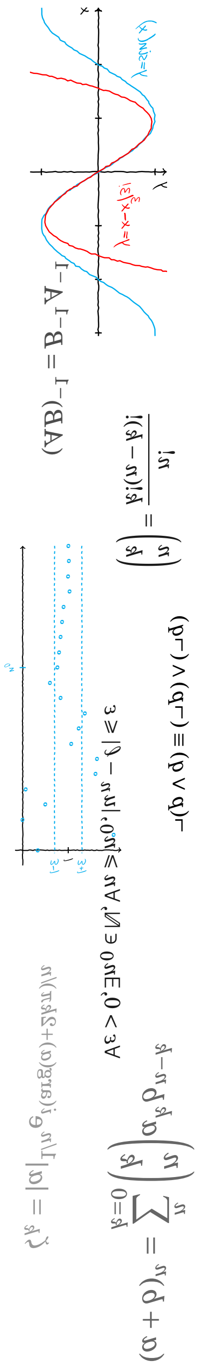
On considère une suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur le segment I. On la notera α.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant k^n |u_0 - \alpha|$.
4. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
5. **Application** : on définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variations.
   (b) On pose $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Prouver qu'il existe un réel $k \in [0;1[$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$.
   (c) Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par
   $$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

172 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur le segment $[a,b]$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$ et $f(a) < f(b)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère du plan. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b.

1. Démontrer, par l'absurde, que la droite (AB) coupe la courbe $\mathscr{C}$ en au moins 3 points.
2. Démontrer que :
   $$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$
   Indication : considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
3. Donner une interprétation graphique de ce résultat.



Fonctions trigonométriques réciproques

1 Pour s'entraîner

173 Démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

174 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.
3. $\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

175 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Pourquoi est-il suffisant d'étudier f sur $[0,\pi]$?
3. Simplifier l'expression de f sur $[0,\pi]$. En déduire l'expression de f sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.

176 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f\ :\ x \mapsto \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad g\ :\ x \mapsto \arcsin x.$$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
3. En déduire une relation entre f et g.
4. Simplifier l'expression de la fonction h définie par :

$$h(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

177 Étudier les fonctions $f : x \mapsto \arccos(1-x^2)$ et $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

178 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.

$$f : x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}, \qquad g : x \mapsto \arctan\left(e^x\right).$$

179 Trouver le domaine de définition des fonctions ci-dessous et calculer leurs dérivées si elles existent :

1. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$,
2. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$,
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi - 2\arcsin x}{\pi + 2\arcsin x}}$.

180

1. Étudier le sens de variation de la fonction

$$f : x \longmapsto \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

sur l'intervalle $[0;1[$.

2. En déduire que : $\forall x \in [0;1[,\quad \arcsin(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

181 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

182 Résoudre les équations ci-dessous d'inconnue x :

1. $\arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right) + \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right) = \arcsin(x)$.
2. $\arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right) + \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right) = \arccos(x)$.

Indication : commencer par remarquer que $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < 1$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < 1$ *et en déduire un encadrement de* $\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

2 Pour approfondir

183 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0,1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1,0]$.

184 *Fonctions hyperboliques réciproques*

1. *Construction de la fonction* argcosh.

   (a) Démontrer que la fonction $\cosh : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   (b) En déduire que cosh réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$. On note $\operatorname{argcosh} : [1;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$ sa bijection réciproque.

   (c) Démontrer que argcosh est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que

   $$\forall x \in]1;+\infty[, \quad \operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

   (d) En déduire que argcosh est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$.

2. *Construction de la fonction* argsinh.

   (a) Démontrer que la fonction $\sinh : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire que la fonction sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

   (c) Démontrer que argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   (d) En déduire que argsinh est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. *Construction de la fonction* argtanh.

   (a) Démontrer que la fonction tanh définie par $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire que tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. On note $\operatorname{argtanh} :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

   (c) Démontrer que argtanh est dérivable sur $]-1;1[$ et que

   $$\forall x \in]-1;1[\quad \operatorname{argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

   (d) En déduire que argtanh est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.