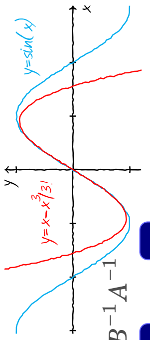


# LES NOMBRES COMPLEXES

## 1. Les essentiels

**1** Soit $\theta \in ]-\pi,\pi[$. Écrire $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ sous forme algébrique.

**2** Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)\cos(3x)$,
2. $\cos^2 x.\sin^2 x$,
3. $\cos^3 x + 2\cos^2 x$,
4. $\sin^2(3x)+\cos^2(2x)$.

**3** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

**4** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue $z$ :

1. $z^2+z+1=0$,
2. $z^6+z^3+1=0$,
3. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où $\theta \in \mathbb{R}$,
4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
5. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
6. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$,
7. $2z^4-(2+i)z^2+1-i=0$,
8. $z^3=4\sqrt{2}(1+i)$

**5** Déterminer les racines

1. carrées de $11+4i\sqrt{3}$,
2. cubiques de $8i$,
3. sixièmes de $-27$,
4. cubiques de $4(\sqrt{3}-i)$.

**6** On définit l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y), \quad \text{où } z = x+iy \text{ avec } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction exp.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ : $\exp(z)=\alpha$.
3. En déduire que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

**7** Soit $n$ un entier naturel supérieur à 2. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel $\theta$, $\quad 1-e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

**8** Soit $n$ un entier naturel supérieur à 2.

1. Calculer la somme et le produit des $n$ racines $n$-ièmes de l'unité.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

**9** Soient $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$ et $\omega$ une racine $n$-ième de l'unité telle que $\omega\neq 1$. On pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de $S$.

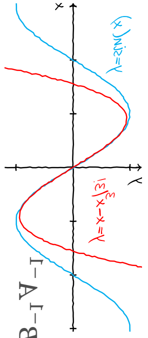
## 2. Pour approfondir

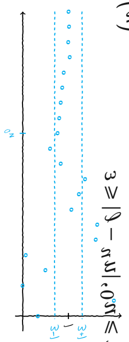
**10** Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

**11** On pose $E = \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^\star \\ z & \mapsto & \frac{2}{(z-1)^2}. \end{array}$$

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = \frac{1}{4-3i}$.
3. Démontrer que $f(E) = \mathbb{C}^\star$. *On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha\in\mathbb{C}^\star$ par $f$.*





4. Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0 < \theta < 2\pi$.
   (a) Démontrer que $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(e^{i\theta})$.
5. On considère l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ \Re e(z) = 1\}$. Démontrer que

$$f(\Delta \setminus \{1\}) = ]-\infty, 0[.$$

**12** On considère le nombre complexe $u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. On pose encore :

$$S = u + u^2 + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Simplifier $u^7$.
   (b) Calculer la somme $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$.
   (c) Calculer le produit $uu^2u^3 \dots u^6$.
2. (a) Montrer que $S$ et $T$ sont deux nombres complexes conjugués.
   (b) Donner la valeur de $S + T$ et calculer $S \times T$.
   (c) Démontrer que la partie imaginaire de $S$ est positive.
   (d) En déduire les valeurs exactes de $S$ et $T$.
3. Calculer la somme :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

# Dérivation

## 1. Les essentiels

**13** Dans chacun des cas suivants :
- préciser sur quel ensemble la fonction $f$ est dérivable,
- calculer sa dérivée $f'$,
- déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$.

1. $f : x \mapsto \ln(\ln x)$, où $a = e$
2. $f : x \mapsto \sqrt{5 + \sin x}$, où $a = 0$
3. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $a = 0$
4. $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $a = 0$
5. $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, où $a = 1$
6. $f : x \mapsto x^x$, où $a = 1$.

**14** Calculer la dérivée $n$-ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{5x}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
3. $h : x \mapsto x e^x$
4. $\varphi : x \mapsto \cos(2x)$.

**15** Étudier la dérivabilité des fonctions $f$, $g$, $h$ et $u$ définies par :
- $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$,
- $g(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$, si $x \neq 1$ et $h(1) = 1$,
- $h(x) = \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$,
- $u(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**16** Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $f$ définie comme suit sur $\mathbb{R}^+$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0;1], \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

**17** La fonction $\varphi$ est définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1. Calculer $\varphi'(x)$. Démontrer que $\varphi$ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
2. On note $\varphi^{-1}$ la bijection réciproque de $\varphi$. Calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$.

**18** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x-2$. Démontrer que $f$ est bijective et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

**19** En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

1. $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ -x\leqslant\sin x\leqslant x$ ;
2. $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ \ln(1+x)<x$ ;
3. $\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}\leqslant\ln(x+1)-\ln x\leqslant\frac{1}{x}$.

**20** Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|.$$

## 2. Pour approfondir

**21** On considère la fonction dérivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. (a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.
   (b) En déduire le sens de variation de $f$, ainsi que les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1-(f(x))^2.$$
3. (a) Démontrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
   (b) Justifier que $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et donner une expression simple de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in J$.

**22**

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que :
$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ 0\leqslant\tan x-x\leqslant x(\tan x)^2.$$
2. On considère la fonction $f:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
   (a) Étudier la parité de $f$.
   (b) Démontrer que $f$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) Démontrer que $f$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
   (d) Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathscr{D}=\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in\mathscr{D}$.

**23** *Final 2017.* Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

1. En remarquant que pour tout réel $x$, $f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$, justifier que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad {f_n}'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$
2. Démontrer que : $\forall x\in[0,1],\quad \left|f_n'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{n!}$.
3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $f_n$ sur l'intervalle $[0,1]$.
4. On considère la suite de terme général $u_n=\mathrm{e}\,f_n(1)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Utiliser la question 3 pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

## 3. Pour travailler seul

**24**
1. Démontrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

**25** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
1. Démontrer que : $\exists c \in ]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

   *Indication : considérer la fonction* $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

**26** *Final 2014.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0, \\[2mm] \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que $f$ est continue en 0.
2. Démontrer que $f$ est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant : $\mathrm{e}^x - 1 - x \underset{(x\to 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
3. Démontrer que $f$ est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
4. La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ?
5. Déterminer les limites éventuelles de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Déterminer l'équation de l'asymptote $\Delta$ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Déterminer les positions relatives de $\Delta$ et de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

# POLYNÔMES

## 1. Les essentiels

**27** Effectuer les divisions euclidiennes de
1. $X^4 + X^2 + X + 2$ par $X^2 - 3$,
2. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$,
3. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
4. $4X^3 + 2iX^2$ par $X + i$.

**28** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par :
1. $X+3$, 2. $X^2 - 6X - 16$, 3. $(X-1)^2(X-2)$.

**29** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$.

**30** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels et $P = aX^{25} + bX^{24} + 1$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $P$ soit divisible par $(X-1)^2$.

**31** Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

1. $4X^2 - X - 3$, 3. $X^6 + 1$, 5. $X^2 + X + 1$,
2. $X^3 - 8$, 4. $X^7 - 1$, 6. $X^4 + X^2 + 1$.

## 2. Pour approfondir

**32** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que le polynôme $P = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

**33** *Final 2018.* Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\left[\cos\left(\mathrm{Im}(z)\right) + i\sin\left(\mathrm{Im}(z)\right)\right]$$

n'est pas polynomiale.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$ .
2. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$ ?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas une fonction polynomiale.

**34**

1. Soit $P = X^2 - 4X + 5$. Décomposer le polynôme $P$ en produits facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On considère le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$ :

$$Q = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X - 1 + 2i.$$

   (a) Démontrer que $Q$ a une racine en commun avec $P$.

   (b) Effectuer la division euclidienne de $Q$ par $X - \alpha$ où $\alpha$ est la racine commune à $P$ et $Q$ trouvée à la question précédente.

   (c) En déduire la décomposition de $Q$ en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

## 3. Pour travailler seul

**35** Soit $n$ un entier, $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. En déduire la factorisation de $P(z)$.
3. En calculant $P(1)$, prouver que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$.
4. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

**36** *Final 2016.* Soient $n$ un entier naturel non nul, et $P$ un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de $P$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.

   (a) Donner une décomposition de $P$ en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

   (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$. Démontrer que toutes les racines de $P$ sont réelles. En déduire que $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

**37** *Final 2014.* On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée $\alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer $\alpha$.

1. Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$ ?
2. En déduire que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine double de $P$.
3. Montrer que la factorisation de $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$P(X) = (X - \alpha)^2(X - \overline{\alpha})^2.$$

4. En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
6. Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer $\alpha$.