1 Premiers pas

Le but de ce nouveau chapitre est d'essayer d'approcher des fonctions à l'aide de polynômes. Pour commencer, on se préoccupera de l'approximation « autour de 0 » de quelques fonctions usuelles. On notera $\varepsilon(x)$ des fonctions telles que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

1 Soit f la fonction définie sur $]-1/2, 1/2[$ par $f(x) = 1/(1-x)$.

1. Rappeler la formule pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison x.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}.$$
3. Que dire de la limite de la fonction $\frac{x}{1-x}$ en 0 ?

Définition 1. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* 0 si il existe un polynôme $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (appelé *partie régulière* du développement limité) tel que :
$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

On peut démontrer que si f admet un développement limité, le polynôme de la définition (la partie régulière) est unique. Que dire alors du développement limité de la fonction de l'exercice 1 ?

2 *Démonstration de cours.* Soient f et g deux fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

1. Que dire de $f+g$?
2. Que dire de fg ?
3. Que dire de af, où $a \in \mathbb{R}$?
4. Peut-on déterminer un développement limité de f à l'ordre $k < n$ au voisinage de 0 ?

2 Résultat fondamental

Théorème 2 (Formule de Taylor-Young)

Si f est n fois dérivable au voisinage de 0, alors :
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Calculer les dérivées successives de f.
2. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.
3. En déduire le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre n.

Répéter les questions précédentes avec la fonction $g(x) = e^x$.

4 Déterminer pour tout n les $f^{(n)}(0)$ où f est la fonction de l'exercice 1.

3 Développements limités usuels à connaître

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} && + x^n\varepsilon(x) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} && + x^{2p+1}\varepsilon(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} && + x^{2p}\varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + + x^3 + \ldots + x^n && + x^n\varepsilon(x) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} && + x^n\varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots \\
&\quad + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} && + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

4 Règle de calcul - applications

Soit u une fonction telle que $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ et admettant un développement limité. Si f admet un développement limité en 0, alors, $f \circ u$ admet un développement limité en 0.

5 Déterminer le développement limité de $\sin(2x^2)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

6 En effectuant un développement limité, retrouver la valeur de la limite de $\sin(x)/x$ lorsque $x \to 0$.

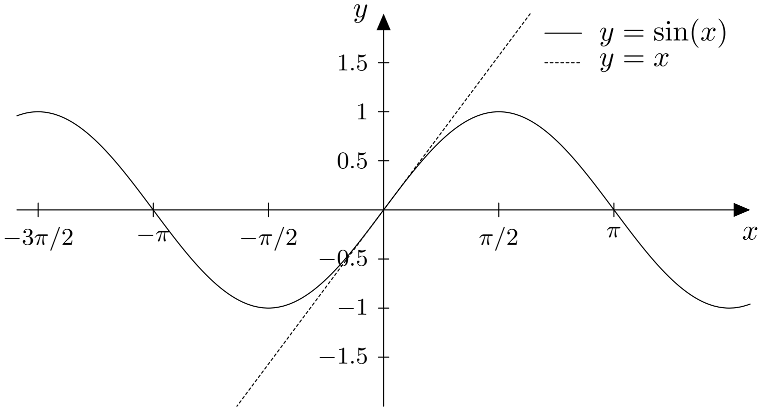
7 Déterminer une valeur approchée de $\sin(1)$. Comparer avec ce que donne la calculatrice. Faire de même avec $e = e^1$.

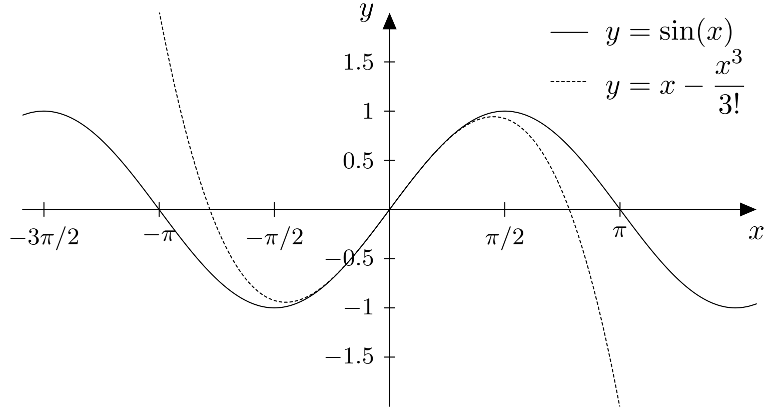
8 Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^\star$. On souhaite étudier le comportement de f « au voisinage de $+\infty$ ».

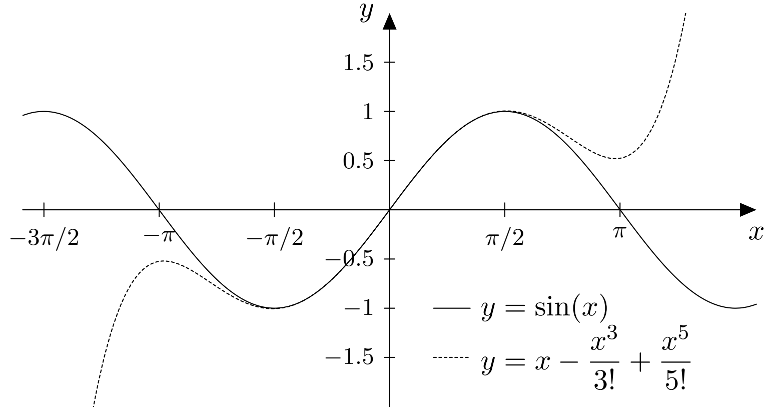
1. Soit $h = 1/x$. Écrire $f(x)$ en fonction de h.
2. Effectuer le développement limité de $f(h)$ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et déterminer son expression.

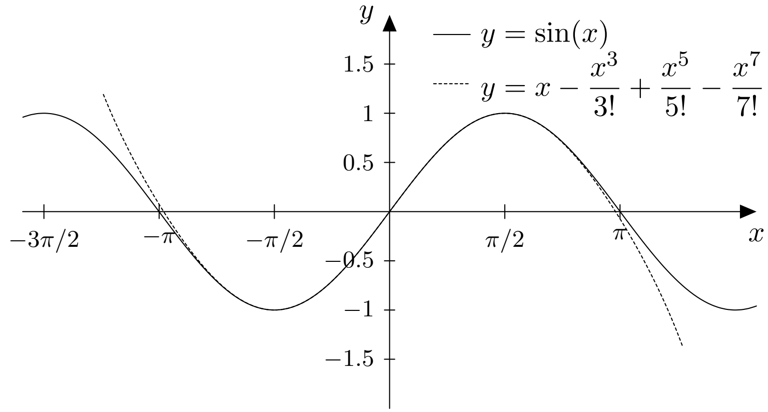
5 Illustration

Approximation de la fonction sinus par la partie régulière de son développement limité.









6 Intégration d'un développement limité

9 *Démonstration de cours.* Soit f une fonction dérivable n fois en 0 et soit F une primitive de f. En utilisant la formule de Taylor-Young, démontrer que F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0. Quel lien y a-t-il entre les développements limités de f et de F ?

10 Déterminer le développement limité en 0 de :

1. $x \mapsto \arctan(x)$, à l'ordre n ;
2. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, à l'ordre n ;
3. $x \mapsto \arccos(x)$, à l'ordre 5 ;

11 En sa rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois.

7 Continuité et dérivabilité

On a vu qu'il était possible d'intégrer le développement limité d'une fonction pour trouver le développement limité d'une de ses primitives. On ne peut pas en général dériver un développement limité ! Cependant, voici ce que l'on peut dire...

12 *Démonstration de cours.* Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 0 en 0. Démontrer que f est continue en 0 et déterminer $f(0)$ en fonction du développement limité de f. Que peut-on dire si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 ? Et si elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 ?

13 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \end{array}$$

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

8 Développement limité au voisinage de $x_0 \neq 0$

On dira qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage du point x_0 si on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Tous les résultats vus sur les développements limités au voisinage de 0 sont encore vrais au voisinage d'un point quelconque (attention, pour la composition, on demandera à ce que la fonction par laquelle on compose admette x_0 pour limite au lieu de 0).

Pour effectuer le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point quelconque, il suffit de « se ramener en 0 ». Voyons sur un exemple comment faire.

14 On veut déterminer un développement limité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\pi/3$. Si on pose $x = \pi/3 + h$, alors, dire que x est au voisinage de $\pi/3$ revient à dire que h est au voisinage de 0.

1. Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\cos(h)$ et de $\sin(h)$.
2. Effectuer le développement limité en h de l'expression trouvée à la question précédente.
3. En déduire le développement limité de cos au voisinage de $\pi/3$.

15 Déterminer le développement limité de :

1. $x \mapsto \sin(x)$, à l'ordre 4 en $\pi/2$;
2. $x \mapsto \arctan(x)$, à l'ordre 3 en 1 ;
3. $x \mapsto \ln(x)$, à l'ordre 3 en 1 ;
4. $x \mapsto e^x$, à l'ordre 4 en 1.

16 On peut écrire une formule de Taylor au voisinage de x_0 quelconque pour une fonction f n fois dérivable.

1. Écrire la formule de Taylor en 0 pour la fonction $g(x) = f(x_0 + x)$.
2. Déterminer $g^{(k)}(0)$ en fonction de $f^{(k)}(0)$.
3. En déduire une formule pour f en remplaçant x par $x - x_0$.

9 Quelques exercices et applications

17 Donner le développement limité en 0 de :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \tan(x)$, à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$, à l'ordre 4 ;
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$, à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$, à l'ordre 3 ;
6. $x \mapsto \sin^6(x)$, à l'ordre 9.

18 Étudier la position de la courbe représentative de $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et en 1.

19 Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\cos(x)\ln(1+x)$, à l'ordre 4 ;
2. $\dfrac{1}{\cos x}$, à l'ordre 4.

20 Donner le DL_2 en $+\infty$ de :

$$x \to \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

21 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

22 Calculer les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad 2.\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad 3.\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

23 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

24 Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;
2. $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.

25 Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci.