1 Représenter dans le plan (Oxy) l'ensemble

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1 \text{ et } y>0\}.$$

2 On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=x^4-y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,7)$. Sa réponse est

$$z=4x^3(x-2)-2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

3 *Final 2017.*

Soit g l'application définie par $g:\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+\ln(x). \end{array}\right.$

1. Montrer que g est strictement croissante et dresser son tableau de variations.
2. En déduire que l'équation $g(x)=0$ d'inconnue $x\in]0;+\infty[$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
3. On considère l'application $F:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^y+y\ln(x) \end{array}\right.$. On admet que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.
   (a) Calculer les dérivées partielles premières de F.
   (b) Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de F au point de coordonnées $(1,0,F(1,0))$.
   (c) Montrer que F admet comme unique point critique le point $(\alpha,\ln(\alpha))$.
   (d) Déterminer la nature de ce point critique.

4 *Final 2016.* **On admet** dans cet exercice que l'équation d'inconnue x, $\mathrm{e}^x=\frac{1}{x^2}$ admet une solution et une seule α dans $\mathbb{R}^*$, et que $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

On considère l'ouvert $U=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U définie par

$$\begin{array}{cccc} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{x}+e^x-y^2e^y \end{array}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.
2. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de f en (x,y).
3. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a=(\alpha,-2)$.
4. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.

5 Soit f la fonction de deux variables définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^3+y^3+3xy.$$

1. Calculer le gradient de f et sa matrice hessienne.
2. Utiliser le gradient de f pour calculer la dérivée de l'application $x\mapsto f(x,\mathrm{e}^x)$.
3. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=f(x,y)$ au point $(1,1,5)$.
4. Déterminer les points critiques de f.
5. Déterminer la nature de ces points critiques.
6. En considérant l'application $x\mapsto f(x,x)$, démontrer que f n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

6 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(2-\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x.$$

7 *Plan tangent.* Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de la fonction f définie ci-dessous au point de coordonnées $(1,1,f(1,1))$:

$$f:(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{\sin(\pi xy)}.$$

8 *Points critiques.* Déterminer les points critiques ainsi que la nature de ces points critiques pour la fonction f définie ci-dessous :

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & xy\exp\left(-x^2-y^2\right)\end{array}$$

9 *Points critiques.* Déterminer les points critiques ainsi que la nature de ces points critiques pour la fonction f définie ci-dessous :

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & 5x^2-6xy+2x+2y^2-2y+1\end{array}$$

10 *Difficulté moyenne.* On considère la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles de f en $(0,0)$.

11 *Difficulté moyenne.* Domaine de définition et dérivée de la fonction suivante (simplifier au maximum) :

$$f:x\mapsto \arcsin(2x-1)+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

12 *Difficile.* Pour tous n, p dans $\mathbb{N}$, on définit $J_{n,p}=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cos^p t\,\mathrm{d}t$. Trouver des relations de récurrence liant $J_{n,p}$ et $J_{n,p-2}$, ainsi que $J_{n,p}$ et $J_{n-2,p}$. En déduire la valeur de $J_{n,p}$.

13 *Application directe.* On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1=(1,0,-1)$, $e'_2=(2,-1,-1)$ et $e'_3=(-1,2,0)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
   (c) En déduire $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Interpréter f géométriquement.

14 *Difficulté moyenne.* Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad M_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad M_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad M_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{B}=(M_1,M_2,M_3,M_4)$ et φ l'application :

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & AM-MA\end{array}\qquad \text{où}\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer la matrice de φ relativement à la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
6. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont-ils en somme directe ?

9 Les dérivées partielles premières de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6y + 10x + 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 6x - 2$$

On trouve comme unique point critique le point $(1,2)$ qui est un minimum local.

13

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On sait que :

$$f(x,y,z)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y-3z \\ y \\ 2x+y+4z \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$f(x,y,z) = (-x-y-3z, y, 2x+y+4z).$$

2. (a) Pour démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut au choix :
   - Démontrer qu'elle est libre et invoquer un argument de dimension.
   - Démontrer qu'elle est génératrice et invoquer un argument de dimension.
   - Démontrer qu'elle est libre et généréatrice (long).

   Pour démontrer que la famille est libre, le plus rapide est sans doute d'échelonner la matrice colonne des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Une fois la matrice échelonnée, on remarque qu'il n'y a pas de colonne nulle et on en déduit que la famille est libre.

   (b) Pour déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$, on peut appliquer la formule :

$$A' = P^{-1}AP.$$

   On trouve après calculs :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Une autre méthode consiste à calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ et à les exprimer en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3 : cela peut être très long en fonction de l'exercice.

   (c) On remarque que la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$ est échelonnée : on en déduit que f est de rang 3 : il s'agit d'un isomorphisme. Par suite, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.