Final MTB

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est interdite. Aucun document n'est autorisé. Les exercices 1, 2 et 3 seront rédigés sur trois copies différentes.

Exercice 1 : Intégrales et développements limités (6 points)

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{1+x}$.
   (a) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de g.
   (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction
   $$h : t \mapsto \int_0^t \frac{1-\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Déterminer $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ à l'aide du changement de variables $u = \sqrt{t^2-1}$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 : Applications linéaires (10 points)

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

Partie A - Questions de cours

1. Soient E un espace-vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E. Donner la définition de « F est un sous-espace vectoriel de E ».
2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Donner la définition de « f est une application linéaire de E dans F ».

Partie B - Étude d'une application linéaire

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose :
   $$e'_1 = (1,-1,0), \quad e'_2 = (0,1,-1), \quad e'_3 = (1,0,-2).$$
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

2. Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$f(e'_1) = 1 - X + X^2, \quad f(e'_2) = 1 - 2X^2 + X^3, \quad f(e'_3) = -X + 3X^2 - X^3.$$

(a) On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice A de f relativement aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}$.

(b) Déterminer le rang de A. L'application linéaire f est-elle surjective ?

(c) Énoncer le théorème du rang pour l'application linéaire f et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ?

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Exprimer le vecteur (a, b, c) dans la base $\mathscr{B}'$.

(b) En déduire que l'expression de $f(a, b, c)$ est donnée par :

$$f(a, b, c) = (4a + 3b + 2c) - aX - (5a + 6b + 4c)\,X^2 + (3a + 3b + 2c)\,X^3.$$

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 : Fonctions de deux variables (4 points)

On admet dans cet exercice que l'équation d'inconnue x, $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$ admet une solution et une seule α dans $\mathbb{R}^{+*}$, et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U définie par

$$f : \left|\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y \end{array}\right.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.
2. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de f en (x, y).
3. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a = (\alpha, -2)$.
4. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.

Corrigé final - MTB - P2016

Exercice 2 : Applications linéaires (10 points)

Partie A - Questions de cours

1. Soient E un espace-vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E. On dit que « F est un sous-espace vectoriel de E » si :
   (i) $0_E \in F$
   (ii) $\forall (u,v) \in F^2, \quad u+v \in F$
   (iii) $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u \in F$.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une « application linéaire » si :
   (i) $\forall (u,v) \in F^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
   (ii) $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Partie B - Étude d'une application linéaire

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose :
$$e'_1 = (1, -1, 0), \quad e'_2 = (0, 1, -1), \quad e'_3 = (1, 0, -2).$$
   (a) • Montrons que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une famille libre. Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2 - 2\lambda_3) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\qquad +\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \qquad\quad = 0 & (L_2) \\ \qquad -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad +\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ \quad -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad +\lambda_3 = 0 & (L_1) \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (L_2) \\ \qquad\quad -\lambda_3 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que la famille $\mathscr{B}'$ est libre.

   • $\mathscr{B}'$ est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Puisque $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - 2e_3$, la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$f(e'_1) = 1 - X + X^2, \quad f(e'_2) = 1 - 2X^2 + X^3, \quad f(e'_3) = -X + 3X^2 - X^3.$$

(a) Puisque

$$\begin{cases} f(e'_1) = 1 + (-1) \times X + 1 \times X^2 + 0 \times X^3 \\ f(e_2) = 1 + 0 \times X + (-2) \times X^2 + 1 \times X^3 \\ f(e'_3) = 0 \times 1 + (-1) \times X + 3 \times X^2 + (-1) \times X^3, \end{cases}$$

la matrice A de f relativement aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} .1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) • On échelonne la matrice A pour déterminer son rang :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg} \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ &= 2, \text{ car la matrice ci-dessus est échelonnée et comporte 2 colonnes non nulles.} \end{aligned}$$

• Puisque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(A)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Or f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f) \neq \dim(\mathbb{R}_3[X])$ et donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}_3[X]$, ce qui implique que f n'est pas surjective.

(c) Puisque $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_3[X])$, le théorème du rang donne :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f),$$

donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f) = 3 - \mathrm{rg}(f).$$

D'après la question précédente, $\mathrm{rg}(f) = 2$, donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1.$$

On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 0$ et donc que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc f n'est pas injective.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) $\mathscr{B}'$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, il existe des réels uniques λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3' = (a, b, c).$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3' = (a,b,c) &\iff (\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2 - 2\lambda_3) = (a,b,c) \\
&\iff \left\{ \begin{array}{llllll} \lambda_1 & & +\lambda_3 & = a & (L_1) \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & & = b & (L_2) \\ & -\lambda_2 & -2\lambda_3 & = c & (L_3) \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{llllll} \lambda_1 & & +\lambda_3 & = a & (L_1) \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = a+b & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ & -\lambda_2 & -2\lambda_3 & = c & (L_3) \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{llllll} \lambda_1 & & +\lambda_3 & = a & (L_1) \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = a+b & (L_2) \\ & & -\lambda_3 & = a+b+c & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = a - (-a-b-c) = 2a + b + c \\ \lambda_2 = (a+b) - (-a-b-c) = 2a + 2b + c \\ \lambda_3 = -a - b - c. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où :

$$(a,b,c) = (2a+b+c)e_1' + (2a+2b+c)e_2' + (-a-b-c)e_3'.$$

   (b) f étant linéaire, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) =& (2a+b+c)f(e_1') + (2a+2b+c)f(e_2') + (-a-b-c)f(e_3') \\
=& (2a+b+c)(1 - X + X^2) + (2a+2b+c)(1 - 2X^2 + X^3) \\
&+ (-a-b-c)(-X + 3X^2 - X^3) \\
=& \Big((2a+b+c) + (2a+2b+c)\Big) + \Big(-(2a+b+c) - (-a-b-c)\Big)X \\
&+ \Big((2a+b+c) - 2(2a+2b+c) + 3(-a-b-c)\Big)X^2 \\
&+ \Big((2a+2b+c) - (-a-b-c)\Big)X^3 \\
=& (4a+3b+2c) - aX - (5a+6b+4c)\,X^2 + (3a+3b+2c)\,X^3.
\end{aligned}$$

4. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\
&\iff (4a+3b+2c) - aX - (5a+6b+4c)\,X^2 + (3a+3b+2c)\,X^3 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{llll} 4a & +3b & +2c & = 0 \\ -a & & & = 0 \\ 5a & +6b & +4c & = 0 \\ 3a & +3b & +2c & = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{llll} 3b & +2c & = 0 & (L_1) \\ & a & = 0 & (L_2) \\ 6b & +4c & = 0 & (L_3) \\ 3b & +2c & = 0 & (L_4) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{llll} 3b & +2c & = 0 & (L_1) \\ & a & = 0 & (L_2) \\ & 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ & 0 & = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} c & = -\dfrac{3}{2}b \\ a & = 0 \end{array}\right. \\
&\iff (a,b,c) = \left(0, b, -\frac{3}{2}b\right) = b\left(0, 1, -\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\left((0,1,-\frac{3}{2}\right)\right)$ et $\left(\left(0,1,-\frac{3}{2}\right)\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3 : Fonctions de deux variables (4 points)

On pose $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y$

1. U est le demi plan ouvert situé à droite de l'axe des ordonnées (axe exclu) des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $x > 0$.
2. Pour tout couple $(x,y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\left(2y\,\mathrm{e}^y + y^2\,\mathrm{e}^y\right) = -y(2+y)\mathrm{e}^y$$

3. Le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f sont solution(s) du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} -\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x = 0 \\ -y(2+y)\mathrm{e}^y = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2} \\ y(2+y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = \alpha \\ y = -2 \text{ ou } y = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = \alpha \\ y = -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{c} x = \alpha \\ y = 0 \end{array}\right.$$

car on a admis que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$ admettait une seule solution α dans $]0\,,\,+\infty[$.
La fonction f admet donc exactement **deux points critiques** :

$$\boxed{a = (\alpha\,,\,-2)} \quad \text{et} \quad \boxed{b = (\alpha\,,\,0)}$$

4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U, il suffit de vérifier la condition suffisante d'extrémum d'ordre 2.
   On calcule d'abord les dérivées partielles secondes de f sur U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3} + e^x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \;\text{ et }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -(2+4y+y^2)e^y$$

En utilisant les notations de Monge au point $a = (\alpha, -2)$:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha\,,$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -(2-8+4)e^{-2} = 2\,e^{-2}$$

La matrice hessienne de f en a est donc : $H(f)_a = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2\,e^{-2} \end{pmatrix}$

son déterminant est $rt - s^2 = 2\left(\dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha\right)e^{-2} > 0$ donc $\boxed{rt - s^2 > 0 \text{ avec } r > 0}$.
Ainsi $\boxed{f \text{ présente un minimum local en } a}$.

Remarques :

- on pourrait démontrer que ce minimum n'est pas absolu. En effet, la deuxième application partielle de f en un point quelconque $(x_0\,,y_0)$ de U est la fonction $f_2 : t \longmapsto f(x_0\,,t) = \dfrac{1}{x_0} + \mathrm{e}^{x_0} - t^2\mathrm{e}^t$ qui a pour limite $-\infty$ lorsque $t \to +\infty$.
- on pourrait enfin prouver que f ne présente pas d'extremum local en b.

Exercice 2 : barème détaillé (4 points)

1. **0,5 point** : l'étudiant doit d'une façon ou d'une autre, préciser que la frontière est exclue (par l'adjectif «ouvert» ou par un dessin ou autre...)
2. **1 point** dont 0,5 pt pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x$ et 0,5 pt pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y(2+y)\mathrm{e}^y$
3. **1 point** dont :
   - 0,5 point pour la résolution correcte du système **par équivalences**,
   - 0,25 point pour rappeler le résultat admis,
   - 0,25 point pour indiquer le deuxième point critique $(\alpha\,,\,0)$.
4. **1,5 point** dont :
   - 0,5 point pour les dérivées partielles secondes :
     $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^3} + \mathrm{e}^x\,,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0\,,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -(2+4y+y^2)\mathrm{e}^y$
   - 0,5 point les notations de Monge au point a : $r = \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha,\ s = 0$
     et $t = 2\,\mathrm{e}^{-2}$.
   - 0,5 point pour justifier (avec $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$) que f a un minimum local en a. Ne pas exiger la preuve que ce minimum n'est pas absolu.