1 Pour s'entraîner : calculs de développements limités

70
1. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + e^x - \cos(x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.
3. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.
4. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sin\left(2x^2\right)$ à l'ordre 5 en 0.

71
1. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \exp(x)$ à l'ordre 3 en 2.
2. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \ln x$ à l'ordre 2 en 3.
3. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 en $\pi/2$.
4. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4.

72 Déterminer le développement limité de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.

73 En se rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois jusqu'à obtenir le $DL_5(0)$ de tan.

2 Étude locale des fonctions en un point

74 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

75 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^4}$. Calculer $\varphi^{(5)}(0)$.

76 Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

77 Soit f la fonction définie par :

$$f \ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos(x) - e^x}{x} \end{array}$$

1. Démontrer que f admet une limite en 0. On notera encore f le *prolongement par continuité de f*.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en 0.
3. Quelles sont les positions relatives de T et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0 ?

78
1. Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}.$$

2. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f le prolongement par continuité de f en 0. Que vaut $f(0)$?
3. Justifier que la fonction f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f, puis déterminer la position relative au voisinage de 0 de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

79 Soit f la fonction définie par :

$$f \ :\ \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2} \end{array}$$

1. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative, au voisinage de 0, de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

3 Étude locale des fonctions en l'infini

80 Soit f la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

Démontrer l'existence d'une asymptote (D) en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f et déterminer son équation, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

81 Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right). \end{array}$$

Démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$. Déterminer l'équation de (D) et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

4 Pour travailler seul

82 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ.
2. En déduire la limite ℓ de φ en 0.
3. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) au voisinage de 0.
4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$g(x) = x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$
   (a) À l'aide de la question 1, démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g admet une asymptote oblique $\mathscr{D}_{+\infty}$ en $+\infty$. Préciser l'équation de $\mathscr{D}_{+\infty}$, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport $\mathscr{D}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Démontrer, de même, que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}_{-\infty}$ en $-\infty$. Préciser l'équation de $\mathscr{D}_{-\infty}$, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport $\mathscr{D}_{-\infty}$ au voisinage de $-\infty$.

83

1. Rappeler, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction
$$\begin{array}{rccc} f & : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\cos x}. \end{array}$$
3. On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$
Justifier que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Démontrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
5. (a) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Déduire de la question précédente l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage de 0.

1 Reconnaître une application linéaire

84 Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ? Justifier.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA \end{array}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont fixés
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y,x+y,3y) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

85 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} M_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+3y-4z \\ x+y+2z \\ -z \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Déterminer une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX.$$
2. En déduire que f est un endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. L'application f est-elle bijective ?

2 Image et noyau

86 On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' - P(0). \end{array}$

1. Démontrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Calculer $\varphi(X+1)$.
4. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

87

1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$f(1,3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad f(2,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(0,0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer l'expression de $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

88 On considère l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X). \end{array}$

1. Déterminer une base du noyau de φ.
2. Déterminer une base de l'image de φ.
3. Vérifier que le résultat est cohérent à l'aide du théorème du rang.

89 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y+z,y-z). \end{array}$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
3. (a) L'application linéaire f est-elle injective ? Justifier.
   (b) L'application linéaire f est-elle surjective ? Justifier.

90 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Notons $B = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de E. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_m : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2P'' - (2m-1)XP' + m^2P. \end{array}$$

1. Démontrer que l'application f_m est linéaire.
2. Calculer $f_m\left(X^k\right)$ pour $k \in \{0,1,2\}$.
3. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f_m)$ puis la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f_m)$ en fonction du paramètre m.

91 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \left(2x, -2x-y-z, 2y+2z\right).$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

92 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications linéaires.

1. Démontrer l'inclusion : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Démontrer l'inclusion : $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
3. Établir l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

3 Pour travailler seul

93 On considère l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2y-x, x+3y). \end{array}$$

1. Déteminer $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)$.
2. Déterminer $\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$.

94 Calculer $f(1,-2,-1)$ où $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[X]$ est l'application linéaire définie par :

$$f(1,0,0) = -X + X^2, \qquad f(0,1,0) = X, \qquad f(0,0,1) = 1 + 3X^3.$$

95

1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\left(1+X+X^2\right) = (1,-2), \qquad f(X) = (1,1), \qquad f\left(1-2X^2\right) = (3,1).$$

2. Calculer $f\left(3X^2\right)$.
3. f est-elle surjective ?
4. f est-elle injective ?

96 *Final Automne 2020.* Soit $f \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)). \end{array}$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. (a) Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f\left(X^2\right)$, $f\left(X^3\right)$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. (a) Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Déduire des questions précédentes la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. (a) Calculer $f(X - X^3)$.
   (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.