Travaux dirigés MTB

TD 1 : Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1. Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 puis B^3. En déduire B^n pour tout entier $n \geqslant 3$.
2. Développer le produit : $(I_3 + B)(I_3 - B + B^2)$.
   Que peut-on en déduire pour la matrice A ?
3. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme.
   En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? Que peut-on en conclure sur A ?

Exercice 4. Calculer l'inverse s'il existe de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits suivants : PP', D^2, D^3 et PDP'.
2. Déduire de la question précédente un moyen simple de calculer A^2 et A^3.

Exercice 6. **1.** Définir les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,33 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Calculer (à l'aide de Maxima) alors A^{-1} et B^{-1}. Que remarquez-vous ?

2. Résoudre l'équation matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$

2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

3. Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence :

$$u_0 = 0 \ ; \ v_0 = 1 \ ; \quad u_{n+1} = -u_n + v_n \ ; \quad v_{n+1} = 2u_n$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n\, A + v_n\, I$

4. On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
Exprimer alors y_n en fonction de n.

6. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 8. Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Montrer que A^n est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.

3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geqslant 2$. Montrer que $A^2 = (n-2)\,A + (n-1)\,I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2,. Déterminer alors à quelle condition sur les coefficient de A, A^{-1} existe et trouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $\det A = ad - bc$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Exercice 10. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 13x + 2y = 0 \\ 6x + y = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y - 2z + t = -1 \\ x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y + z + t = 2 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + 2t = 2 \end{cases}$

Exercice 11. Soit m un paramètre réel. On considère le système (S) d'inconnues x, y et z : $\begin{cases} x + my + m^2z &= 1 \\ m^2x + y + mz &= 0 \\ mx + m^2y + z &= 0 \end{cases}$.

1. À quel système échelonné le système (S) est-il équivalent ?
2. Pour quelles valeurs de m, (S) admet-il une solution unique ? Exprimer alors cette solution en fonction de m.
3. Résoudre (S) pour les autres valeurs de m.

Exercice 12. En fonction du paramètre réel m, préciser l'ensemble des solutions du système linéaire suivant : $\begin{cases} x - 2y + z &= m \\ x + my + 2z &= 2 \\ -x + 2y - mz &= -1 \end{cases}$. On donnera la nature géométrique de l'ensemble des solutions (en précisant point, et vecteur(s) directeur(s) de cet ensemble).

Exercice 13. Résoudre le système linéaire suivant où $m \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ mx - 2y + mz &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ -mx + my - mz &= 0 \end{cases}$.

TD 2 : Primitives, integration

Exercice 14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t$ **2.** $\int_1^2 \ln t \, \mathrm{d}t$ **3.** $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 15. Donner les primitives des fonctions

1. $t \mapsto \cos t \sin t$ **2.** $t \mapsto \tan t$ **3.** $t \mapsto \cos^3 t$

Exercice 16. Donner les primitives des fonctions

1. $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ **2.** $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ **3.** $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$

Exercice 17. À l'aide d'intégration par parties, déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 t \ln t \, \mathrm{d}t$ **2.** $\int_0^{\sqrt{3}} t \arctan t \, \mathrm{d}t$ **3.** $\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}t$.

Indication. Pour le **2.** on pourra chercher deux réels a et b tels que $\frac{t^2}{t^2+1} = a + \frac{b}{t^2+1}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ **2.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ **3.** $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 19. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ (on pourra ensuite utiliser l'indication donnée dans l'exercice 16).

Exercice 20. **1.** Chercher des coefficients réels a, b, c, d tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{t^3}{t+1} = at^2 + bt + c + \frac{d}{t+1}$.

2. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}}$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt[6]{2+x}$.

Exercice 21. Déterminer les primitives suivantes en procédant par le changement de variable donné :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$, en posant $u = \sqrt{t}$

2. $\displaystyle\int \frac{\ln t \mathrm{d}t}{t + t(\ln t)^2}$, en posant $u = \ln t$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1}$, en posant $u = \mathrm{e}^t$ (on pourra chercher deux réels a et b tels que $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{u}{u+1} = a + \frac{b}{u+1}$).

Exercice 22. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable donné :

1. $I_1 = \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$, en posant $u = \mathrm{e}^x$.
   Indication. On pourra chercher deux réels a et b tels que $\frac{1}{u^2+u} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u}, \forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.
2. $I_2 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t}$.

Exercice 23. Soit n un entier naturel, et $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.
3. Donner la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 24.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x$ en posant le changement de variables $u = 1 - x$.
2. Simplifier l'expression $\dfrac{1-(1-x)^n}{x}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, et en déduire la relation :

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

   Rappel : $\binom{n}{k}$ représente le coefficient binomial k parmi n.

Exercice 25. Calculer les limites des suites de terme général :

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 26. Soit la fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(2).e^x \leqslant f(x) \leqslant \ln(2).e^{2x}$, et que pour tout réel $x < 0$, $\ln(2).e^x \geqslant f(x) \geqslant \ln(2).e^{2x}$.
3. Prolonger f en zéro par continuité. On note encore f la fonction prolongée.
4. f est-elle dérivable en zéro ?

Exercice 27. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation liant I_n et I_{n+1}.

3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n).

5. Soit (u_n) une suite réelle définie par
$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$$
On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 28. Pour tout entier n, on note :
$$I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}(1-x)^n \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}(1-x)^n \, \mathrm{d}x.$$

1. **a.** Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$.

b. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}(n+1)}$$

c. Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

b. En déduire la limite de I_n et celle de $n.I_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 29. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t+1} \, \mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. **a.** Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \; \forall t \in [0, x] \,, \; \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

c. En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

2. **a.** Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

b. Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t+1} \leqslant 1$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 30 (Final 2017)**.** On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\quad \varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{x}$.

1. Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}^\star$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de φ.

3. En déduire la limite ℓ de φ en 0.

4. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Déduire des questions précédentes que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c. En déduire l'équation de la tangente T à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 0 et la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à T.

TD 3 : Espaces Vectoriels

Exercice 31. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$

2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Exercice 32. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$?

1 - $\left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & 0 & ia \\ 0 & a & a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{C} \right\}$ 2 - $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix} ; abc = 1 \right\}$

3 - $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix} ; a+b+c = 0 \right\}$

Exercice 33. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x+y+z=0, x-y=z-2x\}$

$F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x+y+z=0, (x-y)^2=z-2x\}$

Exercice 34. On désigne par E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

$$\{f\in E, 2.f(0)=f(1)\}, \{f\in E, f(0)+1=f(1)\}, \{f\in E, \forall x\in[0,1] f(x)=f(1-x)\}.$$

Exercice 35. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$

2. $\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$

3. $\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$

4. $\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$

Exercice 36. Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de E qui sont croissantes, et $\Delta = \{f - g | f\in\mathcal{C}, g\in\mathcal{C}\}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 37. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $F\cap G$ est il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple.

2. $F\cup G$ est il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 38. Soient $P(X) = -X + 2X^2$, $Q(X) = i + 4X + 2X^2$, et $R(X) = 3i + 13X + 4X^2$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (l'ensemble des polynômes à coefficients complexes : c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$).

1. Le polynôme R appartient-il au sous-espace engendré par P et Q ?

2. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par ces trois polynômes.

Exercice 39. Soient $F = \left\{f\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$

et $G = \{f\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \mid f \text{ constante}\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Familles libres et génératrices, bases

Exercice 40. Montrer dans $\mathbb{R}_1[X]$ (polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 1) que la famille $\big(1+X, -1+X, 2+X\big)$ est liée (on donnera une combinaison linéaire qui le montre) mais que deux vecteurs quelconques de cette famille forme une partie libre.

Exercice 41. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ avec $\vec{x}_1 = (1,0,1)$ et $\vec{x}_2 = (1,2,2)$

2. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1,0,0)$, $\vec{x}_2 = (1,1,0)$ et $\vec{x}_3 = (1,1,1)$

3. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1,2,1)$, $\vec{x}_2 = (2,1,-1)$ et $\vec{x}_3 = (1,-1,-2)$

4. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{x}_2 = (2,-1,3)$ et $\vec{x}_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 42. On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = x\cos x,\ f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 43. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\vec{x} = (1,-1,1)$ et $\vec{y} = (0,1,a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\vec{u} = (1,1,2)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Comparer alors $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$, $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{u})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{y}, \vec{u})$.

Exercice 44. Soit $E = \{(x+2y, -x+y, 5x), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Justifier rapidement le fait que E soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner une base.

Exercice 45. Les familles suivantes sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$?

$$((1,0),(0,1))\,, \qquad ((1,1),(1,2),(-1,0))\,, \qquad ((3/5,1),(0,0))\,,$$
$$((1,1))\,, \qquad ((0,0))\,, \qquad ((3,1),(-3/2,-1/2))$$

Exercice 46. Soit, dans la base canonique, le vecteur $u = (1,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Vérifier rapidement si les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^3$ ou non et, si oui, calculer les coordonnées de u dans la nouvelle base.

$$\mathcal{A} = \Big((1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\Big), \qquad \mathcal{B} = \Big((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\Big),$$
$$\mathcal{C} = \Big((2,0,3),(4,2,6),(1,0,3)\Big), \qquad \mathcal{D} = \Big((1,3,2),(2,5,0),(3,0,0)\Big).$$

Exercice 47. Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels, de base $\big(e_1, e_2, e_3\big)$. On considère les vecteurs de cet espace, définis par :

$f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = e_1 + e_2 - e_3,\ f_3 = -e_1 + e_3,\ f_4 = e_1 + e_2.$

1) Montrer que $\big(f_1, f_2, f_3, f_4\big)$ est une famille liée et génératrice de E.

2) Montrer que $\mathcal{B} = \big(f_1, f_2, f_3\big)$ est une base de E.

3) Donner les coordonnées de $u = e_1 + 2e_2 + e_3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 48. Pour quelles valeurs du paramètre réel m la famille $\left(\binom{1}{m}, \binom{m}{3}\right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 49. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs de E tels que la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit libre. On pose $\vec{u} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{v} = \vec{z} + \vec{x}$ et $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$.
Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

Exercice 50. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (2, 1, 1)$
2. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = (-1, 1, 0), \vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$
3. $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\big\}$.

Dimension et somme

Exercice 51. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 52. Donner la dimension des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ suivants :

1. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ fixé, et de dérivée seconde s'annulant en 0.
2. $\mathbb{C}^3$.
3. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\Big((1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 2)\Big)$

Exercice 53. Supposons que E est un espace vectoriel de dimension n. Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Existe-t-il un sous espace vectoriel de dimension p ?

Exercice 54. A-t-on les égalités entre espaces vectoriels réels suivantes :

1. $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}) + \text{Vect}(\{(2, 1, 2, 1)\})$.
2. $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}) + \text{Vect}(\{(1, 1, 2)\})$. Cette somme est-elle directe ?
3. Pour $n \in \mathbb{N},\ n > 3$, $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_3[X] + \{P(X) \in \mathbb{R}_n[X] / P''(0) = 0\}$. Cette somme est-elle directe ?
4. $\mathbb{R}^3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\big\} \bigoplus \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\big\}$. Déterminer la dimension de ces espaces vectoriels.

Exercice 55. On considère dans $E = \mathbb{R}^3$, les vecteurs :
$a = (1, 1, 1)$; $b = (1, 1, 2)$; $c = (1, 1, 0)$; $d = (0, 0, 1)$; $e = (0, 1, 1)$

1. Montrer que le sous-espace engendré par $\{a, b\}$ est égal au sous-espace engendré par $\{c, d\}$.
2. Montrer que $E = \text{Vect}(a, b) + \text{Vect}(e)$. Cette somme est-elle directe ?

3. Compléter la famille (a, c) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 56. Dans $\mathbb{R}^4$, soient F et G les espaces vectoriels engendrés respectivement par les vecteurs $f_1 = (1,0,1,0)$, $f_2 = (1,1,0,1)$, $f_3 = (1,2,0,1)$ et $g_1 = (1,2,-1,2)$, $g_2 = (0,0,1,0)$, $g_3 = (1,3,-2,3)$, $g_4 = (0,1,0,1)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et en déduire la dimension de F.

2. Montrer que $g_4 \in < g_1, g_2, g_3 >$ et que (g_1, g_2, g_3) est une base de G. En déduire la dimension de G.

3. En déduire (sans aucun calcul) un système générateur de $F + G$.

4. Montrer que (f_1, f_2, f_3, g_2) est une base de $F + G$.

5. Donner la dimension de $F \cap G$.

6. Montrer que (g_1, g_3) est une base de $F \cap G$.

Exercice 57. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $\vec{u} = (1,0,1,0), \vec{v} = (0,1,-1,0), \vec{w} = (1,1,1,1), \vec{x} = (0,0,1,0)$ et $\vec{y} = (1,1,0,-1)$. Soit $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$, et $F \cap G$?

Exercice 58. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:

1. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1,1,1,1), \vec{x}_2 = (1,-1,1,-1)$ et $\vec{x}_3 = (1,0,1,1)$.

2. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ avec $\vec{x}_1 = (1,1,0,1), \vec{x}_2 = (1,-1,1,0), \vec{x}_3 = (2,0,1,1)$ et $\vec{x}_4 = (0,2,-1,1)$.

TD 4 : Développements limités

Exercice 59. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de chacune des fonctions :

1. $f : x \mapsto \sin x - \cos x + \frac{1}{1-x}$

2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x}\sin x$

3. $f : x \mapsto \sin x \cos x$

4. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

5. $f : x \mapsto \sin(\tan x)$

6. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$

Exercice 60. Donner les DL à l'ordre 3 au voisinage de 1 de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln x, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x, \qquad x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Exercice 61. Écrire le développement limité de la fonction f à l'ordre n au voisinage de a.

1. $f : x \mapsto \sin x$, avec $a = \frac{\pi}{3}$, et $n = 4$.

2. $f : x \mapsto x\cos x$, avec $a = \frac{\pi}{2}$, et $n = 5$.

3. $f : x \mapsto \ln\sqrt{x}$, avec $a = 1$, et $n = 3$.

Exercice 62. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2 + x^3\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro, mais que $f''(0)$ n'existe pas.

Exercice 63. En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{1}{x^2}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$

Exercice 64. En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x + 1 - x}{(x-1)\ln x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec $a > 0$ et $b > 0$

Exercice 65. Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 66. Soit n un entier naturel.

1. Rappeler le $DL_n(0)$ de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u}$

2. En déduire le développement limité en zéro à l'ordre $2n$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

3. Calculer le développement limité en zéro à l'ordre $2n+1$ de la fonction Arctan.

Exercice 67. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Calculer $f'(x)$, et déterminer le développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre 8.

Exercice 68. **1.** Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de zéro de la fonction arcsin.

2. Calculer le $DL_5(0)$ de $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. En déduire le $DL_6(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \arcsin^2 x$.

Exercice 69. Étudier localement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x}$ au voisinage de zéro : prolongement par continuité, dérivibalité, équation de la tangente , position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 70. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 71. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

2. On note encore f son prolongement par continuité. Donner le $DL_2(0)$ de f.

3. Que peut-on en déduire pour le graphe de f au point d'abscisse 0 ?

Exercice 72. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1. Rappeler le $DL_3(0)$ de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$.

2. En déduire que le graphe $\mathcal{C}_f$ représentant f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. On donnera l'équation réduite de cette asymptote, et on précisera la position relative de cette asymptote par rapport à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 73. Étudier les branches infinies de f avec $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. Préciser également le comportement local en $x_0 = 0$.

Exercice 74 (Final 2007)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2+1)\arctan x$.

1. Étudier la parité de f. Proposer un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

2. Dresser le tableau de variations de f, en précisant la limite en $+\infty$.

3. Montrer que f est bijective.

4. Calculer le $DL_3(0)$ de f. En déduire la nature du point O.

5. On note g la bijection réciproque de f.

- **a.** Que vaut $g(0)$?
- **b.** Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $g'(0)$.
  En déduire une équation de la tangente en O à la courbe représentant g.
- **c.** On admet que g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer sans calcul que $g''(0) = 0$.

6. On propose de déterminer le $DL_3(0)$ de $g = f^{-1}$. On note ce développement limité $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

- **a.** Montrer que $a_0 = 0$.

b. Exprimer le $DL_3(0)$ de la composée $f \circ g$ en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3.

c. Utiliser alors l'égalité $\forall x \in \mathbb{R},\ f(g(x)) = x$ pour identifier les coefficients a_1, a_2, a_3.

Exercice 75. **1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - x - x^2 = 0$. On notera α_1 et α_2 ses deux solutions telles que $\alpha_1 < \alpha_2$.

2. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

3. On suppose dans cette question uniquement que n est un entier supérieur ou égal à 2. En utilisant la formule de Leibniz, et la relation $(1 - x - x^2)f(x) = 1$, démontrer que pour tout réel x différent de α_1 et α_2 :

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n - 1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

4. On définit la suite u par $u_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout entier naturel n.

a. Donner u_0 et u_1.

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

5. Donner le $DL_n(0)$ de la fonction f en fonction des termes de la suite u.
Calculer ce développement lorsque $n = 5$.

Exercice 76 (Final 2011)**.**
On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 2x \cosh x$.
Partie A.

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1], f(x) - x > 0$.

2. Prouver que f réalise une bijection de $[0, 1]$ vers un intervalle à préciser. On note $f^{(-1)}$ la bijection réciproque de f.
Dresser les tableaux de variations de f et $f^{(-1)}$.

3. Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction f.

Partie B. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = f^{(-1)}(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in]0, 1]$.

2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

b. En déduire que la suite est convergente, et déterminer sa limite.

3. On pose pour tout entier naturel n : $a_n = 2^n u_n$.

a. vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\cosh(u_{n+1})}$. En déduire que la suite (a_n) est décroissante.

b. Prouver que la suite (a_n) est convergente.

Exercice 77. On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$, ainsi que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$.
On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0, I_1.

2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n

4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Majorer la fonction $g : x \to e^{-2x}$ sur $[0,1]$

6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$

9. En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

10. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\, I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

TD 5 : Applications linéaires

Exercice 78. Les applications entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto x + y + 2z$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto x + y + 1$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto xy$

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto x - z$?

Exercice 79. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif) de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 80. Soit l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y + z, x + z, x + y) \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Est-ce un automorphisme ?

2. Soient $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\big\}$, et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\big\}$.

a. Déterminer une base de E puis une base de F.

b. En déduire $u(E)$ et $u(F)$.

Exercice 81. On considère les vecteurs $(1, 2, 0), (0, 1, -2), (3, 0, 1), (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que ces 4 vecteurs sont l'image des 4 vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^4$, e_1, e_2, e_3, et e_4, par une application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer l'image par f du vecteur $(2, 3, 1, 2)$.

2. Calculer l'image par f d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 82. Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que : $f(1, 0, 0) = (0, 1)$, $f(1, 1, 0) = (1, 0)$ et $f(1, 1, 1) = (1, 1)$.
Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer noyau et image de f.

Exercice 83. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^5 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + y + z, 2x + y + z, 2x + 2y + z, y + z) \end{array} \right.$.
Calculer une base du noyau, et une base de l'image de f. Écrire la formule du rang pour f.

Exercice 84. Soit $\big(e_1, e_2\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f(e_1) = e_1 - e_2,\ f(e_2) = -e_1 + e_2.$$

1. Calculer les coordonnées de l'image par f du vecteur (x, y).

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 85. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$. Montrer les équivalences suivantes :

1. $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$,

2. $\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker}\, f = E \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

Exercice 86. Soient deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :
$E = \mathbb{R}_n[X]$, et $F = \{x \mapsto a.\cos(x) + b.\sin(x); (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Justifier sans démonstration le fait que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que l'application "dérivée seconde" est un endomorphisme sur E, puis sur F.

3. Déterminer le noyau et l'image de cette application dans les deux cas. A-t-on $\mathrm{Ker}(d) \oplus \mathrm{Im}(d) = E$ (resp. F) ?

Exercice 87. Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$, m un nombre réel, et f_m l'endomorphisme défini dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$M_{f_m} = \begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m-2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de m, f_m est-il bijectif ? Dans les cas où f_m est bijectif, déterminer le matrice de f_m^{-1} dans $\mathcal{B}$.

Exercice 88. Soit l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X.P(X)$ par $X^4 - X^2 - 1$.
Montrer que f est linéaire et écrire la matrice de f dans la base canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$.

Exercice 89. Soit $C = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 2e_3$, $f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im} f$.

2. Trouver une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, et $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}\, f$.

3. Montrer que la juxtaposition de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est libre, et compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 90. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

1. Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $\left(x, f(x)\right)$ est libre.

2. Soit $y \in E$ tel que $\left(x, f(x), y\right)$ libre. Montrer que $\mathcal{B} = \left(x, f(x), y, f(y)\right)$ est une base de E.

3. Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}$?

4. Déterminer $f \in \mathcal{L}(R^4)$ telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 91. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = \mathbb{0}$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Établir que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 92. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\mathrm{Id} = \mathbb{0}_E$.
Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}) = E$.
Interpréter f géométriquement.

Exercice 93. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$.

1. Calculer $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. F et $\ker f$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 94. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que $f \circ f$ est l'application nulle sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$.
2. On suppose maintenant que $f \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Déterminons le rang de f par disjonction de cas : peut-on avoir $\mathrm{rg}(f) = 0$? $\mathrm{rg}(f) = 3$? $\mathrm{rg}(f) = 2$ (utiliser la formule du rang) ? En déduire le rang de f.

TD 6 : Fonctions de deux variables

Exercice 95. Quels sont les ensembles de définition des fonctions suivantes ? (Représenter graphiquement ces ensembles).

1. $f_1 : (x,y) \mapsto \ln\sqrt{\frac{1+xy}{1-xy}}$

2. $f_2 : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$

3. $f_3 : (x,y) \mapsto \ln(1+x^2-y^2)$

4. $f_4 : (x,y) \mapsto \frac{xy}{|x|+|y|}$

Exercice 96. Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$

2. $f_2 : (x,y) \mapsto \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$

3. $f_3 : (x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

4. $f_4 : (x,y) \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Exercice 97. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

4. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 98. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions

1. $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

2. $(x,y) \mapsto x\mathrm{e}^{\sin(xy)}$

3. $(x,y) \mapsto (ax^2+by^2)^n$, où $n \in \mathbb{N}$

4. $(x,y) \mapsto x^y, x > 0$ et $y > 0$

Exercice 99. Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19-x^2-y^2}$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,3,3)$;

2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,1/2,1)$.

Exercice 100. Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2+y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x+2y+z=6$. Même question avec le plan $3x+5y-2z=3$.

Exercice 101. Soit la fonction f définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Quelles sont ses dérivées partielles d'ordre 1 ? Sont-elles continues ?
3. Montrer que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 102. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur Ω, puis les calculer.
3. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 103. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f admet-elle un développement limité d'ordre 1 en $(0,0)$?
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.

Exercice 104. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplacien de f).

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.

Exercice 105. Déterminer les points critiques et, lorsque cela est possible, les extrema des fonctions suivantes définies dans $\mathbb{R}^2$:

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2}$.
2. $f_2 : (x, y) \mapsto 3x^3y - 2xy - 4$.
3. $f_3 : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x - xy$.
4. $f_4 : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 106. Soit $f : (x, y) \mapsto (x - 1)y(y - x)$ sur le domaine délimité par les droites $(y = x)$, $(y = 0)$ et $(x = 1)$.

1. Étudier les extrema locaux de f.
2. Étudier f sur le bord de son domaine d'étude.
3. En déduire les extrema globaux de f.

Exercice 107. Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x} \end{array} \right.$$

1. **a.** Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution et qu'elle apartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
   (On donne $\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,\ 6487$ et $\mathrm{e} \approx 2,\ 7183$)

   b. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et établir que} \quad \left\{ \begin{array}{c} x_0 - \mathrm{e}^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{array} \right.$$

   c. Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

   d. Montrer que $f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0^2}{2} + x_0$

2. On note $g : \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} \end{array} \right.$

   a. Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0.

   b. Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

   c. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0.

TD 7 : Changement de base, rang

Exercice 108. Donner les matrices correspondant (par multiplication à gauche ou à droite) aux opérations élémentaires sur une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ (*i.e.* la première ligne se transforme en la somme des deux premières).

2. $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$.

3. $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ (C pour colonne).

Exercice 109. Trouver l'inverse des matrices (s'il existe) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 110. Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ les endomorphismes f et g dont les matrices associées respectives sont $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\beta = \big((1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\big)$.

2. Calculer $M_f \times M_g$. En déduire la matrice de g dans β.

3. Retrouver le résultat directement.

Exercice 111. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soient $B_1 = \big(1+X, X, 1+X^2, X^3\big)$ et $B_2 = \big(1+X+X^3, 1+X+X^2, 1, 1+2X+X^3\big)$ deux bases de E. Déterminer les matrices de changement de base.

Exercice 112. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$

2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$

3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 113. Chercher les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 114. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de u par rapport à cette base.

Exercice 115. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

L'application "dérivée seconde" induit un morphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$.

On sait qu'après avoir choisi une base on peut identifier $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le morphisme "dérivée seconde" induit ainsi un morphisme f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ (on choisit les bases canoniques).

1. Déterminer les images des 4 vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ par f.
2. En déduire la matrice de f dans les bases canoniques.
3. Déterminer les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ qui correspondent respectivement aux bases $\big(1 + X, X, X + X^2, X^3\big)$ et $\big(1 + X, X\big)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Trouver la matrice de f dans les bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 116. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, (I, J, K, L) et (i, j, k) est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathcal{B} = (I, J, 4I + J - 3L, -7I + K + 5L)$ et $\mathcal{B}' = (4i + 2j + k, 5i + j - k, k)$.

Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?

Exercice 117. Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$

Quelle est la matrice A_1 de h dans les bases (e_1', e_2', e_3') et (f_1, f_2) ?

2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

en conservant la base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice A_2 de h dans les bases (e_1', e_2', e_3') et (f_1', f_2') ?

Exercice 118. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur à 2. On note (e_0, e_1, e_2) sa base canonique. On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P'' - 5P' + 6P \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Écrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2).

3. Montrer que f est un automorphisme de E. En déduire $\ker f$.

4. Écrire la matrice de f^{-1} relativement à la base (e_0, e_1, e_2).

Exercice 119 (Final 2014)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients réels, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
On définit l'application f sur E par : $\forall P \in E,\ f(P) = 2X\,P - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que si P appartient à E, alors $f(P)$ est de degré au plus 2.

2. Montrer que f est un endomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans E).

3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E. Quel est le rang de A ? f est-il bijectif ?

4. On pose $Q_1 = (1 + X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1 - X)^2$.

- **a.** Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.
- **b.** Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de Q_1, Q_2 et Q_3.
- **c.** En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
- **d.** Déterminer une base du noyau de f.

Exercice 120 (Final 2017)**.** Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère l'application $\Phi : E \to E$ qui, à toute fonction f de E, associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\Phi(f))\,(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.
- **a.** Soit $f \in E$. En introduisant une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, justifier que $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- **b.** En déduire que l'application Φ n'est pas surjective.

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

3. Soit la fonction $g : x \longmapsto \cos(2\pi\, x)$. Calculer pour tout réel x, $(\Phi(g))\,(x)$.
Φ est-elle injective ? Justifier.

4. On désigne par $\mathbb{R}_2[x]$ l'ensemble des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Alors $\mathbb{R}_2[x]$ est un sous-espace vectoriel de E.

a. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Prouver que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

b. On considère l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = \Phi(P) \end{array} \right.$

Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{e_0}\,,\,\mathbf{e_1}\,,\,\mathbf{e_2})$ de $\mathbb{R}_2[x]$ où $\mathbf{e_0} : x \mapsto 1$, $\mathbf{e_1} : x \mapsto x$ et $\mathbf{e_2} : x \mapsto x^2$.

c. En déduire que φ est bijective.