1 Les essentiels

1 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(1), \quad \arcsin(0).$$

2 Calculer :

$$\arccos(0), \quad \arccos(-1), \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arctan\left(\sqrt{3}\right), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

3 Soit $x \in [-1,1]$.

1. Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \qquad \cos(2\arcsin(x)).$$

2. Démontrer que :

   (a) $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

4 Démontrer la formule ci-dessous :

$$\forall x \in [-1,1], \ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

5 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad g : x \mapsto \arcsin x.$$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
3. En déduire une relation entre f et g.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

1. Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simplifier de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

2 Pour travailler seul

8 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1], \ \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x > 0, \ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

9 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0,1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1,0]$.

1 Les essentiels

10 Déterminer les solutions des systèmes ci-dessous :

1. $\begin{cases} -2x+y+8z=-2 \\ 3x-2y-12z=7 \\ -2x+y+8z=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3y-z+t=4 \\ -x+y+z+t=0 \\ -y-2z+t=-4 \\ -x+2y+z+t=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2y-6z+8t=6 \\ -x-y-5z+7t=7 \\ -x-3y-11z+15t=13 \\ -x-2y-8z+11t=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3y+3z=-12 \\ -x+3y+6z=-15 \\ 2x+2y-4z=-2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+3z=3 \\ -2x-y-7z=-6 \\ 2x+3y+9z=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+2z-4t=4 \\ -3x+2y+z+4t=-12 \\ 3x-3y-3z-3t=15 \\ -x-y-3z+3t=1. \end{cases}$

11 Soit m un paramètre réel.

1. Échelonner le système (S) d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$(S)\ \begin{cases} x+my+m^2z=1 \\ m^2x+y+mz=0 \\ mx+m^2y+z=0. \end{cases}$$

2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le système (S) admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de m.
3. Résoudre (S) pour les autres valeurs de m.

12 Effectuer, lorsque cela est possible, les calculs matriciels suivants :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

13 On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits QP et PDQ.
2. En déduire une méthode simple pour calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

14 Déterminer la transposée de chacune des matrices ci-dessous.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

15 Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels α et β tels que $A^2=\alpha A+\beta I_3$.
2. En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

16 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B=A-aI_3$, où a et b sont deux réels fixés non nuls.

1. Expliciter les coefficients de la matrice B.

2. Calculer B^2 et B^3, puis B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Pour approfondir

18 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$ et toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, on pose :

$$P(M) = a_n M^n + \cdots a_2 M^2 + a_1 M + a_0 I_2.$$

On admet alors le résultat suivant : *Théorème. Pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$, tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, et tout nombre réel λ,*

(i) $P(M) \in M_2(\mathbb{R})$,

(ii) $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$,

(iii) $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$.

Déduire alors de la question précédente l'expression de la matrice A^n en précisant ses coefficients.

4. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

Écrire la relation de récurrence précédente sous forme matricielle et en déduire l'expression de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$ en fonction de u_0, v_0 et n.

19 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit le nombre réel $\det(A) = ad - bc$, appelé le **déterminant** de la matrice A.

1. On pose $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB.
2. (a) En déduire que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.

   (b) En utilisant la question 1, démontrer que si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.
3. Quel résultat a-t-on démontré ?

3 Pour travailler seul

20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_4$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

21 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

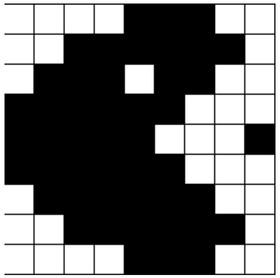
1. Expliciter les coefficients de la matrice B.
2. Calculer B^2 et B^3, puis B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

22 Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&-1&0&-2\\-2&1&1&0\\0&0&0&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&-1&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

23 *Initiation au traitement d'images.* On considère la matrice M de $M_9(\mathbb{R})$ formée de 0 et de 1 représentant l'image ci-dessous :

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1\\1&1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1\\1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1&1\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1&1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1&1\\1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1\\1&1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1\\1&1&1&1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&1\end{pmatrix}.$$



Dans cet exercice, pour transformer une matrice en une image, on utilise le code couleur suivant :

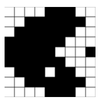
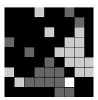
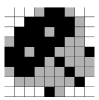
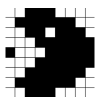
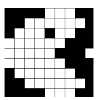
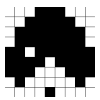
$$0:\blacksquare \qquad 1:\square \qquad \frac{1}{2}:\text{(gris clair)} \qquad -\frac{1}{2}:\text{(gris foncé)}.$$

On définit les matrices

$$U=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}\\0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0\\0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0\\0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0\\0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0\\0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0\\0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0\\0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0\\\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Associer chaque calcul matriciel ci-dessous à l'image correspondante.

1. ${}^tM$
2. $A\times M$
3. $M\times A$
4. $U-M$
5. $\frac{1}{2}\left(M+{}^tM\right)$
6. $\frac{1}{2}\left(M-{}^tM\right)$

a)  b)  c)  d)  e)  f) 

24 *Les systèmes linéaires en chimie.* Utiliser la résolution d'un système linéaire adéquat pour équilibrer la réaction chimique ci-dessous entre l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ et l'acide sulfurique H_2SO_4 :

$$Al(OH)_3+H_2SO_4\longrightarrow Al_2(SO_4)_3+H_2O.$$

1 Les essentiels

25 Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous en précisant leurs ensembles de définition :

1. $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$
2. $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
5. $x \mapsto \tan(x)$
6. $t \mapsto \sqrt{t}$.

26 Calculer les intégrales ci-dessous :

1. $I_1 = \displaystyle\int_2^3 \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(t)\mathrm{d}t$,
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}}\mathrm{d}x$,
4. $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$
5. $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$,
6. $J_3 = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x$.

27 Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

1. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$,
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(x)\mathrm{d}x$,
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)\mathrm{d}t$,
4. $L = \displaystyle\int_0^1 (t^2-t+2)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

28 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

1. $I = \displaystyle\int_2^{2,5} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\mathrm{d}x$, en posant $x = 2+\sin(t)$,
2. $J = \displaystyle\int_1^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, en posant $t = \mathrm{e}^x$,
3. $K = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$, en posant $u = \sqrt{x}$,
4. $L = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+3}}\mathrm{d}t$, en posant $u = \dfrac{t-1}{2}$.

29

1. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall u \in]-1;1[,\ \frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}.$$

2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{2}t-1$, déterminer les primitives de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{4t-t^2}$ sur $]0;4[$.

30 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ci-dessous sont dérivables et exprimer leur dérivée :

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t, \qquad h(x) = \int_0^x xf(t)\mathrm{d}t, \qquad \varphi(x) = x^2\int_{-x}^x xf(t)\mathrm{d}t.$$

31 Déterminer, en utilisant les sommes de Riemann, les limites des suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \qquad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+nk^2}.$$

Indication : pour finaliser le calcul de la limite de U_n, on pourra déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{1+x^2} = a + \dfrac{b}{1+x^2}$.

2 Pour approfondir

32 On considère la fonction $f:[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2e^t+1}\,\mathrm{d}t & \text{si } x>0,\\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et expliciter f'.
2. (a) Démontrer que pour $x>0$ et $t\in[0;x]$: $\dfrac{1}{2e^x+1}\leqslant\dfrac{1}{2e^t+1}\leqslant\dfrac{1}{3}$.

   (b) En déduire : $\forall x>0,\quad \dfrac{1}{2e^x+1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{3}$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?

33 *Médian 2014.* Soit a un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n=\int_0^a \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 en fonction de a.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0,a]$:
$$0\leqslant\frac{x^n}{n}\mathrm{e}^{-x}\leqslant\frac{x^n}{n}.$$
   (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité
$$I_k=I_{k-1}-\frac{a^k}{k!}\mathrm{e}^{-a}.$$
4. Déduire de ce qui précède que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=I_0-\mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}.$$
5. En déduire finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}$.

3 Pour travailler seul

34 Calculer les intégrales ci-dessous :

1. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(t)}{1+(\cos(t))^2}\mathrm{d}t$,
2. $J=\displaystyle\int_1^{2}\frac{t}{2-t^2}\mathrm{d}t$.

35 Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$, en utilisant le changement de variable $u=\cos(x)$.

36 Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$, en posant le changement de variable $x=\sin^2(\theta)$, puis en déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}.$$

37 En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$, puis en déduire un équivalent simple lorsque $n\to+\infty$ de la suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

38 Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer f' sur $]0;+\infty[$.

   (b) Démontrer que f est bien définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et déterminer f' sur $]-\infty;0[$.

   (c) En déduire que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Lorsque $x>0$, donner un encadrement de e^t pour $t\in[x,2x]$. En déduire l'encadrement : $\forall x>0,\ \ln(2)\mathrm{e}^x\leqslant f(x)\leqslant\ln(2)\mathrm{e}^{2x}$.

   (b) Démontrer de même : $\forall x<0,\ \ln(2)\mathrm{e}^{2x}\leqslant f(x)\leqslant\ln(2)\mathrm{e}^x$.
3. Prolonger f par continuité en 0.

1 Sous-espaces vectoriels

39 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y=0\right\}$,
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy=1\right\}$,
3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+3z-1=0\right\}$,
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+3z=0\right\}$.

40 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Justifier.

1. $F_1 = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(0)=1\right\}$,
2. $F_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X]\ ;\ P(1)=P(2)\right\}$,
3. $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
4. $F_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geqslant 0\right\}$.

41 L'ensemble $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_0 - 2u_1 = 0\right\}$ est-il un espace vectoriel ?

42 L'ensemble $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0)+P'(X)=0\right\}$ est-il un espace vectoriel ?

2 Familles libres, familles génératrices, bases

43 Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathscr{F}_1 = \big((1,1),(1,0)\big), \qquad \mathscr{F}_2 = \big((1,1),(2,2)\big), \qquad \mathscr{F}_3 = \big((1,0)\big).$$

44 Considérons, dans $\mathbb{R}_2[X]$, les polynômes :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X+1, \quad Q_3 = X^2+2X.$$

1. Soit $P = X^2+1$. A-t-on $P \in \mathrm{Vect}(Q_1,Q_2,Q_3)$?
2. La famille (Q_1,Q_2,Q_3) est-elle libre ?

45 Justifier que l'ensemble F ci-dessous est un espace vectoriel et déterminer une base de F :

$$F = \left\{M(a,b) = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+b \\ a-b & a+5b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

46 Justifier que l'ensemble $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y-2z=0\right\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

47 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = \sin(x) \\ h(x) = x. \end{cases}$$

La famille (f,g,h) est-elle libre ?

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

48 Soient $F = \mathrm{Vect}\big((1,2,3)\big)$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-y=z\right\}$. Déterminer une famille génératrice de $F+G$.

49 Soient $P = 1+X^2$ et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par P.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$. Appliquer le théorème de la division euclidienne pour la division euclidienne du polynôme A par le polynôme P.
   (b) En déduire que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. En déduire un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}[X]$ tel que F et G soient supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Dimension

50 On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'une base (e_1, e_2, e_3). On définit $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, où

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathscr{F}$.

51 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $\big((1,1),(3,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. $\big((1,0,2),(1,2,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

52 Les familles ci-dessous de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres? Sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathscr{B}_1 = \big((1,1),(1,2)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = \big((1,0),(2,-1),(3,3)\big).$$

53

1. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1,2,-1,1)$ et $\vec{v} = (2,3,0,-1)$ de $\mathbb{R}^4$. Calculer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v})$.
2. Calculer le rang de la famille $\big(P, Q, R\big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$P = 1 + X - X^2, \quad Q = -X + 3X^2, \quad R = 2 + X - X^2.$$

54 On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$, où

$$\begin{cases} a = (1,2,3,4) \\ b = (1,1,1,3) \\ c = (2,1,1,1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = (-1,0,-1,2) \\ y = (2,3,0,1). \end{cases}$$

Déterminer les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$. La somme $F + G$ est-elle directe?

55 On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = 0\Big\}, \quad G = \text{Vect}\big(1 + X, X + X^2, X^2 + X^3\big).$$

1. Déterminer les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.
2. Donner une base de $F \cap G$.

56 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)$, $u_4 = (-1,0,2)$ et $u_5 = (-1,2,4)$ ainsi que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ci-après :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_4, u_5).$$

1. Déterminer la dimension de chacun des espaces F et G.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

5 Pour approfondir

57 On considère le système linéaire (S) ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + 2z - 3t = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + y + 4z - 5t = 0. \end{cases}$$

1. (a) Résoudre (S).
   (b) En déduire que l'ensemble F formé par les solutions du système (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une base.
2. Justifier que l'ensemble $G = \Big\{(a - b, 0, a, 3a + b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
3. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

58 On considère les sous-ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ de $M_n(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathscr{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}, \quad \mathscr{A} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}.$$

1. Démontrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

6 Pour travailler seul

59 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Démontrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

60 Les vecteurs $u = (-2,0,1,-2)$, $v = (0,-3,-1,-1)$ et $w = (0,1,0,3)$ de $\mathbb{R}^4$ forment-ils une famille libre? Une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

61
1. Démontrer que les vecteurs I, J, K, L de $M_2(\mathbb{R})$ définis ci-dessous sont linéairement indépendants :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer que toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

62 Soit $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \right\}$.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Démontrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

63 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_2 = (1,2,3,4)$ et $v_3 = (2,3,4,5)$.

64 Démontrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, engendré par 3 matrices que l'on précisera.

65 On note $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et et on considère les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \qquad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}.$$

où θ est un nombre réel fixé tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.
3. Soit $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées du vecteur m dans la base $\mathscr{B}'$, puis expliciter la matrice $R \in M_2(\mathbb{R})$ telle que : $m_{\mathscr{B}'} = R m_{\mathscr{B}}$.

1 Pour s'entraîner : calculs de développements limités

66 1. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + e^x - \cos(x)$ à l'ordre 3 en 0.

2. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.
3. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.
4. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sin\left(2x^2\right)$ à l'ordre 5 en 0.

67 1. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \exp(x)$ à l'ordre 3 en 2.

2. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \ln x$ à l'ordre 2 en 3.
3. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \cos(x)$ à l'ordre 4 en $\pi/2$.
4. Déterminer le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4.

68 Déterminer le développement limité de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.

69 En se rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois jusqu'à obtenir le $DL_5(0)$ de tan.

2 Étude locale des fonctions en un point

70 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

71 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^4}$. Calculer $\varphi^{(5)}(0)$.

72 Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

73 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos(x) - e^x}{x} \end{array}$$

1. Démontrer que f admet une limite en 0. On notera encore f le *prolongement par continuité de f*.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en 0.
3. Quelles sont les positions relatives de T et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0 ?

74 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt$.

1. (a) Rappeler le $DL_2(0)$ de la fonction $u \longmapsto \sqrt{1+u}$.
   (b) En déduire le $DL_4(0)$ de la fonction $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$.
   (c) Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction f.
2. En déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en 0, ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T).

75 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl}]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2} \end{array}$$

1. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative, au voisinage de 0, de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

3 Étude locale des fonctions en l'infini

76 Soit f la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

Démontrer l'existence d'une asymptote (D) en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f et déterminer son équation, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

77 Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right). \end{array}$$

Démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$. Déterminer l'équation de (D) et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (D) au voisinage de $+\infty$.

4 Pour travailler seul

78 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de φ.
2. En déduire la limite ℓ de φ en 0.
3. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) au voisinage de 0.
4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$g(x) = x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$
   (a) À l'aide de la question 1, démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g admet une asymptote oblique $\mathscr{D}_{+\infty}$ en $+\infty$. Préciser l'équation de $\mathscr{D}_{+\infty}$, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport $\mathscr{D}_{+\infty}$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Démontrer, de même, que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}_{-\infty}$ en $-\infty$. Préciser l'équation de $\mathscr{D}_{-\infty}$, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport $\mathscr{D}_{-\infty}$ au voisinage de $-\infty$.

79
1. Rappeler, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction
$$\begin{array}{rccc} f & : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\cos x}. \end{array}$$
3. On pose pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$
Justifier que la fonction g ainsi définie est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Démontrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
5. (a) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Déduire de la question précédente l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage de 0.

1 Reconnaître une application linéaire

80 Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ? Justifier.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA \end{array}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$ sont fixés
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y,x+y,3y) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

81 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} M_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+3y-4z \\ x+y+2z \\ -z \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Déterminer une matrice $A\in M_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall X\in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X)=AX.$$
2. En déduire que f est un endomorphisme de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. L'application f est-elle bijective ?

2 Image et noyau

82 On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P'-P(0). \end{array}$

1. Démontrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$.
3. Calculer $\varphi(X+1)$.
4. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

83 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$f(1,3,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad f(2,1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad f(0,0,2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'expression de $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

84 On considère l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X). \end{array}$

1. Déterminer une base du noyau de φ.
2. Déterminer une base de l'image de φ.
3. Vérifier que le résultat est cohérent à l'aide du théorème du rang.

85 On considère l'application suivante : $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y).$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?

86 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. Notons $B=\left(1,X,X^2\right)$ la base canonique de E. Soit $m\in\mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_m : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & X^2P''-(2m-1)XP'+m^2P. \end{array}$$

1. Démontrer que l'application f_m est linéaire.
2. Calculer $f_m\left(X^k\right)$ pour $k\in\{0,1,2\}$.

3. En déduire une base et la dimension de $\operatorname{Im}(f_m)$ puis la dimension et une base de $\operatorname{Ker}(f_m)$ en fonction du paramètre m.

87 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z)=\left(2x,-2x-y-z,2y+2z\right).$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
4. $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

88 Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications linéaires.

1. Démontrer l'inclusion : $\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(g\circ f)$.
2. Démontrer l'inclusion : $\operatorname{Im}(g\circ f)\subset\operatorname{Im}(g)$.
3. Établir l'équivalence suivante :

$$g\circ f=0 \iff \operatorname{Im}f\subset\operatorname{Ker}g.$$

3 Pour travailler seul

89 On considère l'application linéaire

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,2y-x,x+3y).\end{array}$$

1. Déteminer $\dim\left(\operatorname{Ker}(f)\right)$.
2. Déterminer $\dim\left(\operatorname{Im}(f)\right)$.

90 Calculer $f(1,-2,-1)$ où $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[X]$ est l'application linéaire définie par :

$$f(1,0,0)=-X+X^2,\qquad f(0,1,0)=X,\qquad f(0,0,1)=1+3X^3.$$

91 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\left(1+X+X^2\right)=(1,-2),\qquad f(X)=(1,1),\qquad f\left(1-2X^2\right)=(3,1).$$

2. Calculer $f\left(3X^2\right)$.
3. f est-elle surjective ?
4. f est-elle injective ?

92 *Final Automne 2020.* Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3\\ P & \mapsto & (P(-1),P(0),P(1)).\end{array}$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. (a) Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f\left(X^2\right)$, $f\left(X^3\right)$.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
3. (a) Rappeler la définition de $\operatorname{Ker}(f)$.
   (b) Déduire des questions précédentes la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$.
4. (a) Calculer $f(X-X^3)$.
   (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

1 Pour s'entraîner

93 On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y-x, 2x-z) \end{array}$$

relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

94 Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' + P(0) \end{array}$$

relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

95 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$f(1,0,0) = 1 - X, \qquad f(0,1,0) = 2X^2 + 5X, \qquad f(0,0,1) = (X+1)^2.$$

Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

96 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ et φ l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer la matrice de φ relativement à la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
6. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont-ils en somme directe ?

97 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1,0,-1)$, $e'_2 = (2,-1,-1)$ et $e'_3 = (-1,2,0)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
   (c) En déduire $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) Interpréter f géométriquement.

98 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L})$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit deux nouvelles bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement : $\mathscr{B} = (\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I} + \vec{J} - 3\vec{L}, -7\vec{I} + \vec{K} + 5\vec{L})$ et $\mathscr{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k})$. Quelle est la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

99 On considère les vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont données par $\varepsilon_1 = (1,-1,1)$, $\varepsilon_2 = (-2,2,-1)$ et $\varepsilon_3 = (2,-1,2)$.

1. Démontrer que $\mathscr{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{F}$.
3. Donner les coordonnées dans $\mathscr{F}$ du vecteur $e_1 + e_2 - e_3$.

2 Pour approfondir

100 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E et former $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
2. Exprimer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et calculer P^{-1}.
3. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

101 On note $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, e_3, e_4\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que f est de rang 2.
2. Déterminer, en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$, une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$. En déduire que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$.
3. Sans calculer le produit de matrices, déterminer A^2.
4. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2\right)$. Démontrer que F et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
5. Notons $\left(u_1, u_2\right)$ la base de $\mathrm{Ker}(f)$ trouvée dans la question 2. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{C} = \left(e_1, e_2, u_1, u_2\right)$ de $\mathbb{R}^4$.
6. Déterminer la matrice de passage P entre la base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Exprimer P^{-1}. Que vaut $P^{-1}AP$?

3 Pour travailler seul

102 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que l'ensemble $E_1 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = X\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E_1.
2. (a) Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 2X\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E_2.
3. Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $E_1 + E_2$ et la dimension de $E_1 + E_2$.
4. Démontrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est A. Déterminer alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ de f relativement à la base $\mathscr{B}'$.

103 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est M. Déterminer successivement le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$, la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis une base de $\mathrm{Ker}(f)$.