

### 1 Les essentiels

1 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi$
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \arctan(1), \arcsin(0).$$

2 Calculer :

$$\arccos(0), \arccos(-1), \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \arctan(\sqrt{3}), \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

3 Soit  $x \in [-1, 1]$ .

- Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \quad \cos(2\arcsin(x)).$$

- Démontrer que :

$$(a) \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad (b) \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

4 Démontrer la formule suivante :  $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ .

5 Démontrer que pour tout réel  $x$  positif,  $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$ .

6 Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad g : x \mapsto \arcsin x.$$

- Déterminer les domaines de définition de  $f$  et de  $g$ .
- Déterminer les points où  $f$  et  $g$  sont dérivables et calculer leurs dérivées.
- En déduire une relation entre  $f$  et  $g$ .

7 On considère la fonction  $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

- Justifier que la fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- En déduire une expression simplifiée de  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

8 Résoudre l'équation suivante :  $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ .

### 2 Pour travailler seul

9 Démontrer les formules ci-dessous :

- $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$ .
- $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

10 Démontrer la formule ci-dessous pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour  $x \in [-1, 0]$ .

1 Les essentiels

11 Déterminer les solutions des systèmes ci-dessous :

$$1. \begin{cases} 3y - z + t = 4 \\ -x + y + z + t = 0 \\ -y - 2z + t = -4 \\ -x + 2y + z + t = 2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} -2y - 6z + 8t = 6 \\ -x - y - 5z + 7t = 7 \\ -x - 3y - 11z + 15t = 13 \\ -x - 2y - 8z + 11t = 10 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x + y + 8z = -2 \\ 3x - 2y - 12z = 7 \\ -2x + y + 8z = -3 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x + 2z - 4t = 4 \\ -3x + 2y + z + 4t = -12 \\ 3x - 3y - 3z - 3t = 15 \\ -x - y - 3z + 3t = 1. \end{cases}$$

12 Dans l'espace muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les trois plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  d'équations respectives :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : 3y + 3z &= -12 \\ \mathcal{P}_2 : -x + 3y + 6z &= -15 \\ \mathcal{P}_3 : 2x + 2y - 4z &= -2. \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ .

13 Soit  $m$  un paramètre réel.

1. Échelonner le système (S) d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + my + m^2z = 1 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ mx + m^2y + z = 0. \end{cases}$$

- Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  le système (S) admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de  $m$ .
- Résoudre (S) pour les autres valeurs de  $m$ .

14 Effectuer, lorsque cela est possible, les calculs matriciels suivants :

$$1. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 4. (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 6. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les produits  $QP$  et  $PDQ$ .
- En déduire une méthode simple pour calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

16 Déterminer la transposée de chacune des matrices ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ -2 \ 0), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

17 Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$  et déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ .
- En déduire que  $A$  est inversible et expliciter son inverse.

18 On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  et  $B = A - aI_3$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels fixés non nuls.

- Expliciter les coefficients de la matrice  $B$ .

- Calculer  $B^2$  et  $B^3$ , puis  $B^k$  pour tout entier  $k \geq 3$ .
- En déduire l'expression de la matrice  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**19** Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 2 Pour approfondir

**20** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2 - 3A + 2I$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.
- Pour  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
- Pour tout polynôme  $P = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$  de  $\mathbb{R}[X]$  et toute matrice  $M \in M_2(\mathbb{R})$ , on pose :

$$P(M) = a_n M^n + \dots + a_2 M^2 + a_1 M + a_0 I_2.$$

On admet alors le résultat suivant : *Théorème. Pour toute matrice  $M \in M_2(\mathbb{R})$ , tous polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ , et tout nombre réel  $\lambda$ ,*

- (i)  $P(M) \in M_2(\mathbb{R})$ ,
- (ii)  $(\lambda P + Q)(M) = \lambda P(M) + Q(M)$ ,
- (iii)  $(PQ)(M) = P(M) \times Q(M)$ .

Déduire alors de la question précédente l'expression de la matrice  $A^n$  en précisant ses coefficients.

- On considère les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  définies par  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

Écrire la relation de récurrence précédente sous forme matricielle et en déduire l'expression de  $(u_n)_n$  et de  $(v_n)_n$  en fonction de  $u_0, v_0$  et  $n$ .

**21** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . On définit le nombre réel  $\det(A) = ad - bc$ , appelé le **déterminant** de la matrice  $A$ .

- On pose  $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Calculer le produit  $AB$ .
- (a) En déduire que si  $\det(A) \neq 0$ , alors  $A$  est inversible.  
(b) En utilisant la question 1, démontrer que si  $\det(A) = 0$ , alors  $A$  n'est pas inversible.
- Quel résultat a-t-on démontré ?

## 3 Pour travailler seul

**22** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $A^2$  et déterminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A^2 = aA + bI_4$ .
- En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

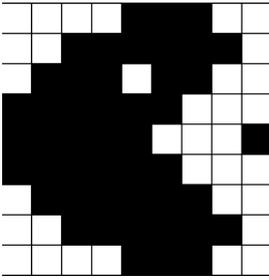
**23** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = A - I_3$ .

- Expliciter les coefficients de la matrice  $B$ .
- Calculer  $B^2$  et  $B^3$ , puis  $B^k$  pour tout entier  $k \geq 3$ .
- En déduire l'expression de la matrice  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**24** Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**25** *Initiation au traitement d'images.* On considère la matrice  $M$  de  $M_9(\mathbb{R})$  formée de 0 et de 1 représentant l'image ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


Dans cet exercice, pour transformer une matrice en une image, on utilise le code couleur suivant :

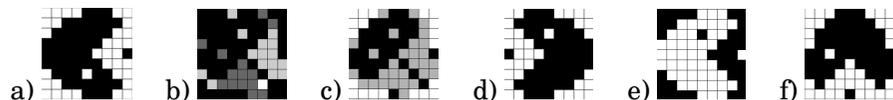
$$0 : \blacksquare \quad 1 : \square \quad \frac{1}{2} : \blacksquare \quad -\frac{1}{2} : \blacksquare.$$

On définit les matrices

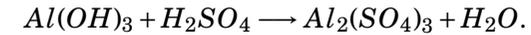
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associer chaque calcul matriciel ci-dessous à l'image correspondante.

1.  ${}^tM$
2.  $A \times M$
3.  $M \times A$
4.  $U - M$
5.  $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$
6.  $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$



**26** *Les systèmes linéaires en chimie.* Utiliser la résolution d'un système linéaire adéquat pour équilibrer la réaction chimique ci-dessous entre l'hydroxyde d'aluminium  $Al(OH)_3$  et l'acide sulfurique  $H_2SO_4$  :



1 Les essentiels

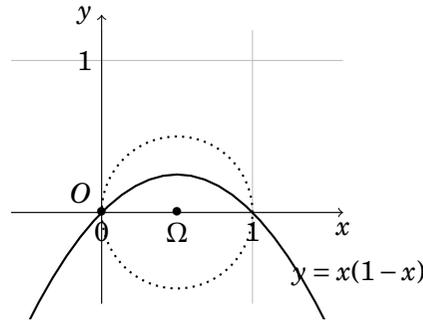
**27** Pour chacune des fonctions ci-dessous, représenter graphiquement  $f$  dans un repère orthonormal du plan, puis en déduire par un calcul d'aire la valeur de l'intégrale  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ .

1.  $f : x \mapsto \frac{1-x}{2}$       2.  $f : x \mapsto |1-2x|$       3.  $f : x \mapsto x-2|x|$ .

**28** On considère le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer l'aire de la surface située sous la parabole d'équation  $y = x(1-x)$  et au dessus de l'axe des abscisses  $(O; \vec{i})$ .

2. On considère le point  $\Omega$  de coordonnées  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Déterminer l'équation du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  et en déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x} dx$ .



**29** Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous en précisant leurs ensembles de définition :

1.  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$       2.  $x \mapsto \frac{1}{x^3}$       5.  $x \mapsto \tan(x)$   
 2.  $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$       4.  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$       6.  $t \mapsto \sqrt{t}$ .

**30** Calculer les intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{x}{1-x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(t) dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}} dx,$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad J_2 = \int_0^{\pi} \cos^4(t)\sin^2(t) dt, \quad J_3 = \int_0^{2\pi} |\cos(x)| dx.$$

**31** Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

1.  $I = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt,$       3.  $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t) dt,$   
 2.  $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(x) dx,$       4.  $L = \int_0^1 (t^2 - t + 2)e^{-t} dt.$

**32** Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

1.  $I = \int_2^{5/2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx$ , en posant  $x = 2 + \sin(t)$ ,  
 2.  $J = \int_1^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^{-x} + e^x} dx$ , en posant  $t = e^x$ ,  
 3.  $K = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ , en posant  $u = \sqrt{x}$ ,  
 4.  $L = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+3}} dt$ , en posant  $u = \frac{t-1}{2}$ ,  
 5. pour  $a \neq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $M = \int_0^x \frac{1}{a^2+t^2} dt$ , en posant  $u = \frac{t}{a}$ ,  
 6.  $N = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos^2(x)}$ , en posant  $u = \tan x$ .

**33** 1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall u \in ]-1; 1[, \frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}.$$

2. En utilisant le changement de variable  $u = \frac{1}{2}t - 1$ , déterminer les primitives de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{4t-t^2}$  sur  $]0; 4[$ .

**34** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Justifier que les fonctions  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ci-dessous sont dérivables et exprimer leur dérivée :

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt, \quad h(x) = \int_0^x x f(t) dt, \quad \varphi(x) = x^2 \int_{-x}^x x f(t) dt.$$

**35** Déterminer, en utilisant les sommes de Riemann, les limites des suites définies par, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + nk^2}.$$

Indication : pour finaliser le calcul de la limite de  $U_n$ , on pourra déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{1+x^2} = a + \frac{b}{1+x^2}$ .

## 2 Pour approfondir

**36** On considère la fonction  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{2e^t + 1} dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et expliciter  $f'$ .
- (a) Démontrer que pour  $x > 0$  et  $t \in [0; x]$  :  $\frac{1}{2e^x + 1} \leq \frac{1}{2e^t + 1} \leq \frac{1}{3}$ .  
 (b) En déduire :  $\forall x > 0, \frac{1}{2e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$ .
- La fonction  $f$  est-elle continue en 0 ?

**37 Médian 2014.** Soit  $a$  un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^a \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$ .

- Calculer  $I_0$  en fonction de  $a$ .
- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0, a]$  :  $0 \leq \frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!}$ .  
 (b) En déduire un encadrement de  $I_n$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 (c) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Démontrer, pour tout entier naturel  $k$  non nul, l'égalité  $I_k = I_{k-1} - \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ .
- Déduire de ce qui précède que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = I_0 - e^{-a} \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}$ .
- En déduire finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$ .

## 3 Pour travailler seul

**38** Calculer les intégrales  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1 + (\cos(t))^2} dt$  et  $J = \int_1^2 \frac{t}{2-t^2} dt$ .

**39** Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ , en posant le changement de variable  $x = \sin^2(\theta)$ , puis en déduire la valeur de :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$ .

**40** En utilisant les sommes de Riemann, calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ , puis en déduire un équivalent simple de la suite de terme général  $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ .

**41** Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .

- (a) Démontrer que  $f$  est bien définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  et déterminer  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ .  
 (b) Démontrer que  $f$  est bien définie et dérivable sur  $]-\infty; 0[$  et déterminer  $f'$  sur  $]-\infty; 0[$ .  
 (c) En déduire que  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition et donner l'expression de sa dérivée sur  $\mathbb{R}^*$ .
- (a) Lorsque  $x > 0$ , donner un encadrement de  $e^t$  pour  $t \in [x, 2x]$ . En déduire l'encadrement :  $\forall x > 0, \ln(2)e^x \leq f(x) \leq \ln(2)e^{2x}$ .  
 (b) Démontrer de même :  $\forall x < 0, \ln(2)e^{2x} \leq f(x) \leq \ln(2)e^x$ .
- Prolonger  $f$  par continuité en 0.

## 1 Sous-espaces vectoriels

**42** Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifier.

1.  $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0\}$ ,
2.  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy = 1\}$ ,
3.  $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z - 1 = 0\}$ ,
4.  $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z = 0\}$ .

**43** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels? Justifier.

1.  $F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(0) = 1\}$ ,
2.  $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(1) = P(2)\}$ ,
3.  $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ,
4.  $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ .

**44** L'ensemble  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_0 - 2u_1 = 0\}$  est-il un espace vectoriel?

**45** L'ensemble  $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) + P'(X) = 0\}$  est-il un espace vectoriel?

## 2 Familles libres, familles génératrices, bases

**46** Les familles suivantes de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont-elles libres? Sont-elles génératrices de  $\mathbb{R}^2$ ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 1), (1, 0)), \quad \mathcal{F}_2 = ((1, 1), (2, 2)), \quad \mathcal{F}_3 = ((1, 0)).$$

**47** Considérons, dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , les polynômes :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X + 1, \quad Q_3 = X^2 + 2X.$$

1. Soit  $P = X^2 + 1$ . A-t-on  $P \in \text{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3)$  ?
2. La famille  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  est-elle libre ?

**48** Justifier que l'ensemble  $F$  ci-dessous est un espace vectoriel et déterminer une base de  $F$  :

$$F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + b \\ a - b & a + 5b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

**49** Justifier que l'ensemble  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - 2z = 0\}$  est un espace vectoriel et en déterminer une base.

**50** On considère les fonctions  $f, g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = \sin(x) \\ h(x) = x. \end{cases}$$

La famille  $(f, g, h)$  est-elle libre ?

## 3 Sommes de sous-espaces vectoriels

**51** Soient  $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y = z\}$ . Déterminer une famille génératrice de  $F + G$ .

**52** Soient  $P = 1 + X^2$  et  $F$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  divisibles par  $P$ .

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. (a) Soit  $A$  un polynôme quelconque de  $\mathbb{R}[X]$ . Appliquer le théorème de la division euclidienne pour la division euclidienne du polynôme  $A$  par le polynôme  $P$ .  
(b) En déduire que tout polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $\mathbb{R}_1[X]$ .
3. En déduire un sous-espace vectoriel  $G$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $F$  et  $G$  soient supplémentaires dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### 4 Dimension

**53** On considère un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$ , muni d'une base  $(e_1, e_2, e_3)$ . On définit  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ , où

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

- Démontrer que  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ .
- Déterminer les coordonnées de  $e_1$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

**54** Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

- $((1, 1), (3, 1))$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- $((1, 0, 2), (1, 2, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**55** Les familles ci-dessous de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont-elles libres? Sont-elles génératrices de  $\mathbb{R}^2$  ?

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (1, 2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = ((1, 0), (2, -1), (3, 3)).$$

- 56**
- On considère les vecteurs  $\vec{u} = (1, 2, -1, 1)$  et  $\vec{v} = (2, 3, 0, -1)$  de  $\mathbb{R}^4$ . Calculer le rang de la famille  $(\vec{u}, \vec{v})$ .
  - Calculer le rang de la famille  $(P, Q, R)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}_2[X]$  définie par :

$$P = 1 + X - X^2, \quad Q = -X + 3X^2, \quad R = 2 + X - X^2.$$

**57** On considère les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$  définis par  $F = \text{Vect}(a, b, c)$  et  $G = \text{Vect}(x, y)$ , où

$$\begin{cases} a = (1, 2, 3, 4) \\ b = (1, 1, 1, 3) \\ c = (2, 1, 1, 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = (-1, 0, -1, 2) \\ y = (2, 3, 0, 1). \end{cases}$$

Déterminer les dimensions de  $F, G, F + G$  et  $F \cap G$ . La somme  $F + G$  est-elle directe ?

**58** On considère les sous-espaces vectoriels suivants de  $\mathbb{R}_3[X]$  :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0\}, \quad G = \text{Vect}(1 + X, X + X^2, X^2 + X^3).$$

- Déterminer les dimensions de  $F, G, F + G$  et  $F \cap G$ .
- Donner une base de  $F \cap G$ .

**59** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs  $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (-1, 0, 2)$  et  $u_5 = (-1, 2, 4)$  ainsi que les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  ci-après :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_4, u_5).$$

- Déterminer la dimension de chacun des espaces  $F$  et  $G$ .
- $F$  et  $G$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  ?

### 5 Pour approfondir

**60** On considère le système linéaire  $(S)$  ci-dessous :

$$(S) \begin{cases} x + 2z - 3t = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + y + 4z - 5t = 0. \end{cases}$$

- (a) Résoudre  $(S)$ .  
(b) En déduire que l'ensemble  $F$  formé par les solutions du système  $(S)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  dont on déterminera une base.
- Justifier que l'ensemble  $G = \{(a - b, 0, a, 3a + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  et en déterminer une base.
- Démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$ .

**61** On considère les sous-ensembles  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  de  $M_n(\mathbb{R})$  définis par :

$$\mathcal{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}, \quad \mathcal{A} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = -M\}.$$

- Démontrer que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $M_n(\mathbb{R})$ .
- Démontrer que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  sont supplémentaires dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

**62** On note  $I$  la matrice identité de  $M_3(\mathbb{R})$  et  $O_3$  la matrice nulle de  $M_3(\mathbb{R})$ . Pour toute matrice  $A$  de  $M_3(\mathbb{R})$ , on définit les ensembles suivants :

$$F_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), AM = M\}$$

$$F_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), A^2M = AM\}.$$

- Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $F_1(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

On admet que  $F_2(A)$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

- (a) Démontrer que :  $\forall A \in M_3(\mathbb{R}), F_1(A) \subset F_2(A)$ .  
(b) Démontrer que si  $A$  est inversible, alors  $F_1(A) \subset F_2(A)$ .
- (a) Démontrer que si  $A - I$  est inversible, alors  $F_1(A) = \{O_3\}$ .  
(b) Application : déterminer  $F_1(A)$  et  $F_2(A)$  pour  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- Dans cette question, on considère la matrice  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Démontrer que pour  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ , on a :

$$M \in F_1(D) \iff a = b = c = g = h = i = 0.$$

(b) En déduire une base de  $F_1(D)$ .

## 6 Pour travailler seul

**63** Soient dans  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs  $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (4, 1, 4)$  et  $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)$ .

- Démontrer que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ne sont pas colinéaires. Faire de même avec  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$ , puis avec  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ .
- La famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  est-elle libre ?

**64** Les vecteurs  $u = (-2, 0, 1, -2)$ ,  $v = (0, -3, -1, -1)$  et  $w = (0, 1, 0, 3)$  de  $\mathbb{R}^4$  forment-ils une famille libre? Une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$ ?

**65** 1. Démontrer que les vecteurs  $I, J, K, L$  de  $M_2(\mathbb{R})$  définis ci-dessous sont linéairement indépendants :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que toute matrice  $M$  de  $M_2(\mathbb{R})$  s'écrit de manière unique sous la forme  $M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L$  avec  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ .

**66** Soit  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$ .

- Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel.
- Démontrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

**67** Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $v_1 = (0, 1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (1, 2, 3, 4)$  et  $v_3 = (2, 3, 4, 5)$ .

**68** Démontrer que l'ensemble  $S_2(\mathbb{R})$  des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ , engendré par 3 matrices que l'on précisera.

**69** On note  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et on considère les vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $\mathbb{R}^2$  définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \quad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j},$$

où  $\theta$  est un nombre réel fixé tel que  $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

- Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- Représenter les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .
- Soit  $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer les coordonnées du vecteur  $m$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , puis expliciter la matrice  $R \in M_2(\mathbb{R})$  telle que :  $m_{\mathcal{B}'} = R m_{\mathcal{B}}$ .

**1 Pour s'entraîner : calculs de développements limités**

**70** 1. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + e^x - \cos(x)$  à l'ordre 3 en 0.

2. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$  à l'ordre 2 en 0.

3. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$  à l'ordre 3 en 0.

4. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \sin(2x^2)$  à l'ordre 5 en 0.

**71** 1. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \exp(x)$  à l'ordre 3 en 2.  
 2. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \ln x$  à l'ordre 2 en 3.  
 3. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \cos(x)$  à l'ordre 4 en  $\pi/2$ .  
 4. Déterminer le développement limité de  $x \mapsto \sqrt{x}$  à l'ordre 2 en 4.

**72** Déterminer le développement limité de la fonction  $x \mapsto \arctan(x)$  à l'ordre 7 en 0.

**73** En se rappelant que  $\tan' = 1 + \tan^2$ , déduire du développement limité de  $\tan$  à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois jusqu'à obtenir le  $DL_5(0)$  de  $\tan$ .

**2 Étude locale des fonctions en un point**

**74** Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

**75** On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^4}$ . Calculer  $\varphi^{(5)}(0)$ .

**76** Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ . Déterminer  $f^{(k)}(0)$ , pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ .

**77** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\cos(x) - e^x}{x}$$

- Démontrer que  $f$  admet une limite en 0. On notera encore  $f$  le prolongement par continuité de  $f$ .
- Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  en 0.
- Quelles sont les positions relatives de  $T$  et de  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de 0 ?

**78** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$ .

- (a) Rappeler le  $DL_2(0)$  de la fonction  $u \mapsto \sqrt{1+u}$ .  
 (b) En déduire le  $DL_4(0)$  de la fonction  $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ .  
 (c) Déterminer le  $DL_5(0)$  de la fonction  $f$ .
- En déduire l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  en 0, ainsi que la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ( $T$ ).

**79** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2}$$

- Démontrer que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
- Quelle est alors la position relative, au voisinage de 0, de la courbe du prolongement de  $f$  par rapport à sa tangente en 0 ?

### 3 Étude locale des fonctions en l'infini

**80** Soit  $f$  la fonction définie par, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(x) = e^{1/x} \sqrt{x(x+2)}.$$

Démontrer l'existence d'une asymptote  $(D)$  en  $+\infty$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant  $f$  et déterminer son équation, ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $(D)$  au voisinage de  $+\infty$ .

**81** Considérons la fonction

$$f : ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Démontrer que la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  admet une asymptote oblique  $(D)$  en  $+\infty$ . Déterminer l'équation de  $(D)$  et préciser la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $(D)$  au voisinage de  $+\infty$ .

### 4 Pour travailler seul

**82** On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}.$$

- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\varphi$ .
- En déduire la limite  $\ell$  de  $\varphi$  en 0.
- On prolonge  $\varphi$  par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = \ell$ . On pose alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

- (a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- (b) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $f$ .
- (c) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  au point d'abscisse 0 et la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $(T)$  au voisinage de 0.

4. On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$g(x) = x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

- (a) À l'aide de la question 1, démontrer que la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  de la fonction  $g$  admet une asymptote oblique  $\mathcal{D}_{+\infty}$  en  $+\infty$ . Préciser l'équation de  $\mathcal{D}_{+\infty}$ , ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}_g$  par rapport à  $\mathcal{D}_{+\infty}$  au voisinage de  $+\infty$ .
- (b) Démontrer, de même, que  $\mathcal{C}_g$  admet une asymptote oblique  $\mathcal{D}_{-\infty}$  en  $-\infty$ . Préciser l'équation de  $\mathcal{D}_{-\infty}$ , ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}_g$  par rapport à  $\mathcal{D}_{-\infty}$  au voisinage de  $-\infty$ .

**83**

1. Rappeler, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $u \mapsto (1+u)^\alpha$ .

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\cos x}.$$

3. On pose pour tout  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t} dt.$$

Justifier que la fonction  $g$  ainsi définie est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  et calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

4. Démontrer que  $g$  admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le déterminer.
5. (a) On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$ . Déduire de la question précédente l'équation de la tangente  $(T)$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
- (b) Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $(T)$  au voisinage de 0.

## 1 Reconnaître une application linéaire

**84** Les applications ci-dessous sont-elles linéaires ? Justifier.

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto (x + y, z)$
- $f_2 : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sont fixés  
 $M \mapsto AM - MA$
- $f_3 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$   
 $(x, y) \mapsto (x - 2y, x + y, 3y)$
- $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto xy$

**85** On considère l'application

$$f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y - 4z \\ x + y + 2z \\ -z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX.$$

- En déduire que  $f$  est un endomorphisme de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- L'application  $f$  est-elle bijective ?

## 2 Image et noyau

**86** On considère l'application :  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$   
 $P \mapsto P' - P(0).$

- Démontrer que  $\varphi$  est linéaire.
- Déterminer  $\text{Im}(\varphi)$ .

- Calculer  $\varphi(X + 1)$ .
- En déduire une base de  $\text{Ker}(\varphi)$ .

**87** 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $M_2(\mathbb{R})$  telle que :

$$f(1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(0, 0, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'expression de  $f(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .
- Déterminer  $\text{rg}(f)$ .

**88** On considère l'application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$   
 $P(X) \mapsto XP'(X).$

- Déterminer une base du noyau de  $\varphi$ .
- Déterminer une base de l'image de  $\varphi$ .
- Vérifier que le résultat est cohérent à l'aide du théorème du rang.

**89** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, y - z).$

- Démontrer que  $f$  est linéaire.
- (a) Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .  
(b) Déterminer la dimension de  $\text{Im}(f)$ .
- (a) L'application linéaire  $f$  est-elle injective ? Justifier.  
(b) L'application linéaire  $f$  est-elle surjective ? Justifier.

**90** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . Notons  $B = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $E$ . Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère l'application

$$f_m : E \rightarrow E$$

$$P \mapsto X^2 P'' - (2m - 1) X P' + m^2 P.$$

- Démontrer que l'application  $f_m$  est linéaire.
- Calculer  $f_m(X^k)$  pour  $k \in \{0, 1, 2\}$ .
- En déduire une base et la dimension de  $\text{Im}(f_m)$  puis la dimension et une base de  $\text{Ker}(f_m)$  en fonction du paramètre  $m$ .

**91** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par :

$$f(x, y, z) = (2x, -2x - y - z, 2y + 2z).$$

- Démontrer que  $f$  est linéaire.
- Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .
- Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .
- $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  ?

**92** Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications linéaires.

- Démontrer l'inclusion :  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .
- Démontrer l'inclusion :  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .
- Établir l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im}f \subset \text{Ker}g.$$

### 3 Pour travailler seul

**93** On considère l'application linéaire

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, 2y - x, x + 3y).$$

- Déterminer  $\dim(\text{Ker}(f))$ .
- Déterminer  $\dim(\text{Im}(f))$ .

**94** Calculer  $f(1, -2, -1)$  où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  est l'application linéaire définie par :

$$f(1, 0, 0) = -X + X^2, \quad f(0, 1, 0) = X, \quad f(0, 0, 1) = 1 + 3X^3.$$

**95** 1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$f(1 + X + X^2) = (1, -2), \quad f(X) = (1, 1), \quad f(1 - 2X^2) = (3, 1).$$

- Calculer  $f(3X^2)$ .
- $f$  est-elle surjective ?
- $f$  est-elle injective ?

**96** *Final Automne 2020.* Soit  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)).$

- Démontrer que  $f$  est linéaire.
- (a) Calculer  $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)$ .  
 (b) Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .
- (a) Rappeler la définition de  $\text{Ker}(f)$ .  
 (b) Déduire des questions précédentes la dimension de  $\text{Ker}(f)$ .
- (a) Calculer  $f(X - X^3)$ .  
 (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .

### 1 Les essentiels - Domaine de définition

**97** Déterminer et représenter graphiquement dans un plan les domaines de définition des fonctions de deux variables ci-dessous. Préciser quels domaines sont des parties bornées de  $\mathbb{R}^2$ .

$$f_1 : (x, y) \mapsto \ln\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right), \quad f_2 : (x, y) \mapsto e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \quad f_3 : (x, y) \mapsto \sqrt{x-y^2}.$$

**98** On considère la fonction  $f : (x, y) \mapsto \ln(1-x^2-y^2)$ .

- Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de  $f$ .
- Soit  $\alpha > 0$ . Déterminer  $\mathcal{L}_{-\alpha}$  la ligne de niveau  $-\alpha$  de  $f$ .

**99** Déterminer et représenter graphiquement dans le plan le domaine de définition de la fonction  $f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 4)$ .

### 2 Les essentiels - Limite et continuité

**100** On définit  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par : pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$  et  $f(0, 0) = 1$ .

- Étudier les limites lorsque  $n \rightarrow \infty$  de  $f(0, \frac{1}{n})$  et  $f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ .
- Que peut-on en conclure ?

**101** Étudier la continuité des fonctions ci-après définies pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3 Les essentiels - Dérivées partielles premières

**102** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$f(1, -1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = -2.$$

Donner, sans justification, l'équation simplifiée du plan tangent à la surface représentative de  $f$  au point de coordonnées  $(1, -1, 2)$ .

**103** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Déterminer l'équation du plan tangent

$$(x, y) \mapsto e^{\cos(\pi xy)}.$$

$\mathcal{P}$  à la surface représentative de  $f$  au point de coordonnées  $(1, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$ .

**104** Soit  $f : (x, y) \mapsto \arccos(xy - 1)$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et le représenter graphiquement dans un plan.
- Calculer la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$ .

### 4 Les essentiels - Points critiques et extrema

**105** Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction  $f$  donnée ci-dessous ainsi que la nature de ce(s) point(s) :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x^3 - 6x^2 + 2y^3 + 3y^2.$$

**106** Étudier les points critiques et leurs natures pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6).$$

**107** Déterminer les points critiques ainsi que la nature de ces points critiques pour la fonction  $f$  définie ci-dessous :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \exp(-x^2 - y^2).$$

**108** Déterminer les points critiques ainsi que la nature de ces points critiques pour la fonction  $f$  définie ci-dessous :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1.$$

**109** Trouver les points critiques de la fonction  $f$  suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selles.

$$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1.$$

**110** Soit  $f$  la fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Déterminer l'équation du plan tangent à  $f$  au point de coordonnées  $(1, -1, f(1, -1))$ .
3. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de  $f$ .
4. Étudier la nature de ce(s) point(s) critique(s).

**111** Déterminer les points critiques éventuels de la fonction ci-dessous et leur(s) nature(s) en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + my^2.$$

## 5 Pour approfondir

**112** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les dérivées partielles en  $(0, 0)$  de  $f$ .
2. La fonction est-elle de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**113** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. On admet que  $f$  admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Les calculer en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
3. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
4. La dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ?
5. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

**114** Soit  $f$  la fonction de deux variables définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

1. Calculer le gradient de  $f$  et sa matrice hessienne.

- Utiliser le gradient de  $f$  pour calculer la dérivée de l'application  $x \mapsto f(x, e^x)$ .
- Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation  $z = f(x, y)$  au point  $(1, 1, 5)$ .
- Déterminer les points critiques de  $f$ .
- Déterminer la nature de ces points critiques.
- En considérant l'application  $x \mapsto f(x, x)$ , démontrer que  $f$  n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur  $\mathbb{R}^2$ .

**115 Final 2016** On admet dans cet exercice que l'équation  $e^x = \frac{1}{x^2}$  d'inconnue  $x$  admet une solution et une seule  $\beta$  dans  $\mathbb{R}^*$ , et que  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ .

On considère l'ouvert  $U = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  et la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  définie par

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y.$$

- Représenter graphiquement l'ensemble  $U$ .
- Calculer, pour tout  $(x, y)$  de  $U$ , les dérivées partielles premières de  $f$  en  $(x, y)$ .
- Montrer que  $f$  admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est  $a = (\beta, -2)$ .
- Est-ce que  $f$  admet un extremum local en  $a$  ? Si oui, préciser sa nature.

**116 Final 2017** Soit  $g$  l'application définie par :

$$g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + \ln(x).$$

- Montrer que  $g$  est strictement croissante et dresser son tableau de variations.
- En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$  admet une unique solution. On notera  $\alpha$  cette solution dans la suite.

3. On considère l'application

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x e^y + y \ln(x).$$

On admet que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur son ensemble de définition.

- Calculer les dérivées partielles premières de  $F$ .
- Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de  $F$  au point de coordonnées  $(1, 0, F(1, 0))$ .
- Montrer que  $F$  admet comme unique point critique le point  $(\alpha, \ln(\alpha))$ .
- Déterminer la nature de ce point critique.

## 6 Pour travailler seul

**117** Soit :

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy.$$

Après avoir trouvé l'unique point critique de  $g$ , montrer sans utiliser les notations de Monge qu'il s'agit d'un minimum global.

*Indication* : on pourra passer en coordonnées polaires.

**118** Chercher les extrémums des fonctions  $f(x, y)$  suivantes :

- $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$
- $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^4 + y^4$
- $(x, y) \mapsto x^2 y^2 (1 + 3x + 2y)$
- $(x, y) \mapsto 2x + y - x^4 - y^4$
- $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}, x, y > 0$
- $(x, y) \mapsto x e^y + y e^x.$

1 Pour s'entraîner

**119** On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (y - x, 2x - z)$$

relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

**120** Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto XP' + P(0)$$

relativement à la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**121** Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  définie par :

$$f(1, 0, 0) = 1 - X, \quad f(0, 1, 0) = 2X^2 + 5X, \quad f(0, 0, 1) = (X + 1)^2.$$

Déterminer la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**122** Dans  $M_2(\mathbb{R})$ , on considère les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$  et  $\varphi$  l'application définie par :

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto AM - MA \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire.
- Déterminer la matrice de  $\varphi$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

- Déterminer une base de  $\text{Im}(\varphi)$ .
- Déterminer une base de  $\text{Ker}(\varphi)$ .
- $\text{Ker}(\varphi)$  et  $\text{Im}(\varphi)$  sont-ils en somme directe ?

**123** On considère l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Déterminer  $f(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- Soient  $e'_1 = (1, 0, -1)$ ,  $e'_2 = (2, -1, -1)$  et  $e'_3 = (-1, 2, 0)$ .
  - Montrer que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ .
  - En déduire  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ .
  - Interpréter  $f$  géométriquement.

**124** Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement aux bases canoniques,  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L})$  et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit deux nouvelles bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^3$  respectivement :  $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I} + \vec{J} - 3\vec{L}, -7\vec{I} + \vec{K} + 5\vec{L})$  et  $\mathcal{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k})$ . Quelle est la matrice de  $f$  relativement à  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ?

**125** On considère les vecteurs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  de  $\mathbb{R}^3$  dont les coordonnées dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  sont données par  $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (-2, 2, -1)$  et  $\varepsilon_3 = (2, -1, 2)$ .

- Démontrer que  $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Écrire la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{F}$ .
- Donner les coordonnées dans  $\mathcal{F}$  du vecteur  $e_1 + e_2 - e_3$ .

## 2 Pour approfondir

**126** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice relativement à la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

- Démontrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$  et former  $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ .
- Exprimer la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et calculer  $P^{-1}$ .
- Quelle relation lie les matrices  $A, D, P$  et  $P^{-1}$  ?
- Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**127** On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et on considère  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que  $f$  est de rang 2.
- Déterminer, en fonction des vecteurs de  $\mathcal{B}$ , une base de  $\text{Ker} f$  et une base de  $\text{Im} f$ . En déduire que  $\text{Im} f = \text{Ker} f$ .
- Sans calculer le produit de matrices, déterminer  $A^2$ .
- On pose  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ . Démontrer que  $F$  et  $\text{Ker} f$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$ .
- Notons  $(u_1, u_2)$  la base de  $\text{Ker}(f)$  trouvée dans la question 2. Déterminer la matrice de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, u_1, u_2)$  de  $\mathbb{R}^4$ .
- Déterminer la matrice de passage  $P$  entre la base  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Exprimer  $P^{-1}$ . Que vaut  $P^{-1}AP$  ?

## 3 Pour travailler seul

**128** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Résoudre l'équation  $AX = X$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ .
  - En déduire que l'ensemble  $E_1 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = X\}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ , et déterminer une base et la dimension de  $E_1$ .
- Résoudre l'équation  $AX = 2X$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ .
  - En déduire que l'ensemble  $E_2 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 2X\}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ , et déterminer une base et la dimension de  $E_2$ .
- Déterminer une base  $\mathcal{B}'$  de  $E_1 + E_2$  et la dimension de  $E_1 + E_2$ .
- Démontrer que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $f : M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$  l'application linéaire dont la matrice relativement à la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ . Déterminer alors la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ .

**129** On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  et on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement à la base canonique est  $M$ . Déterminer successivement le rang de  $f$ , une base de  $\text{Im}(f)$ , la dimension de  $\text{Ker}(f)$ , puis une base de  $\text{Ker}(f)$ .

9

1. Posons, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$f(x) = \arccos(-x) + \arccos(x).$$

On sait que la fonction  $\arccos$  est continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] -1, 1[$ . De plus, on a :  $\forall x \in [-1, 1], -x \in [-1, 1]$ . Par conséquent, la fonction  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] -1, 1[$  (en tant que composée et somme de fonctions qui le sont) et :

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -1, 1[, \quad f'(x) &= (-1)\arccos'(-x) + \arccos'(x) \\ &= (-1)\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction  $f$  est constante sur  $] -1, 1[$ . Par continuité de  $f$  en  $-1$  et en  $1$ , il s'ensuit que  $f$  est constante sur le segment  $[-1, 1]$ . En particulier, on a :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = f(0).$$

Or

$$\begin{cases} f(0) = 2\arccos(0) \\ \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \pi,$$

i.e.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi.}$$

2. On sait que la fonction  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Donc par composition et somme, la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur

$]0, +\infty[$ . De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, +\infty[, \quad f'(x) &= \arctan'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction  $f$  est constante sur  $]0, +\infty[$ .

• 1ère méthode :  $f$  est constante, donc il existe une constante réelle  $c$  telle que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = c.$$

En particulier, on a :  $c = f(\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . Or

$$\begin{cases} \arctan(\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right). \end{cases}$$

Donc  $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$  car  $\frac{\pi}{3} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$  car  $\frac{\pi}{6} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Ainsi,  $c = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  et donc :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2},$$

i.e.

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

• 2ème méthode : la fonction  $f$  est constante sur  $]0, +\infty[$  donc il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = c.$$

Par passage à la limite en  $+\infty$ , on en déduit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ .

Or on sait d'après le cours que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ . D'autre part,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(0) = 0$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$  et donc :  $c = \frac{\pi}{2}$ .

Par conséquent,

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2},$$

i.e.

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. **Indication.** Pour les questions 3 et 4, on ne procède pas comme dans les deux questions précédentes. On utilise des formules de trigonométrie :

$$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2, \quad \sin^2 = 1 - \cos^2.$$

**Correction.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On sait que  $\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\cos(\arctan(x)) > 0$ . De plus,

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + (\tan(\arctan(x)))^2 = 1 + x^2.$$

Par conséquent,

$$(\cos(\arctan(x)))^2 = \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$|\cos(\arctan(x))| = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Puisque  $\cos(\arctan(x)) > 0$ , on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On sait que

$$\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \cos^2(\arctan(x)).$$

Or, d'après la question précédente,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

D'où

$$\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$|\sin(\arctan(x))| = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (*)$$

- Supposons  $x \in ]-\infty, 0]$ . D'après le graphe de la fonction  $\arctan$ , on sait que  $\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, 0]$ . Donc  $\sin(\arctan(x)) \leq 0$ . D'autre part,  $|x| = -x$  car  $x \leq 0$ . Par conséquent (\*) devient :  $-\sin(\arctan(x)) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$  i.e.  $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .
- Supposons  $x \in [0, +\infty[$ . D'après le graphe de la fonction  $\arctan$ , on sait que  $\arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . Donc  $\sin(\arctan(x)) \geq 0$ . D'autre part,  $|x| = x$  car  $x \geq 0$ . Par conséquent (\*) devient :  $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

10

- On définit les fonctions

$$f = \arcsin \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arccos(\sqrt{1-x^2}).$$

Les fonctions  $f = \arcsin$  et  $\arccos$  sont définies et continues sur  $[-1, 1]$ . Or, pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $0 \leq x^2 \leq 1$  donc  $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ . Ainsi, la fonction  $g$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ .

- De plus,  $f = \arcsin$  et  $\arccos$  sont dérivables sur  $] -1, 1[$  et :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , on a  $1-x^2 > 0$ . La fonction racine carrée étant dérivable sur  $]0, +\infty[$ , on en déduit que la fonction  $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  de dérivée :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad u'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par conséquent, la fonction  $g = \arccos \circ u$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -1, 1[, \quad g'(x) &= u'(x) \times \arccos'(u(x)) \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{|x|} \\ &= \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x}{|x|} f'(x). \quad (*) \end{aligned}$$

- Pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a  $|x| = x$ , donc  $g'(x) = f'(x)$ . Ainsi,

$$\forall x \in [0, 1[, \quad (g - f)'(x) = 0.$$

On en déduit que la fonction  $g - f$  est constante sur  $[0, 1[$ . Par continuité de  $f$  et de  $g$  en 1, la fonction  $g - f$  est constante sur le segment  $[0, 1]$ . En particulier,

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) - f(x) = g(0) - f(0).$$

Or

$$f(0) = \arcsin(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = \arccos(1) = 0.$$

D'où

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) - f(x) = 0,$$

i.e.

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

- D'autre part, pour tout  $x \in ] -1, 0]$ , on a  $|x| = -x$ , donc  $g'(x) = -f'(x)$ . Ainsi,

$$\forall x \in ] -1, 0], \quad (g + f)'(x) = 0.$$

On en déduit que la fonction  $g + f$  est constante sur  $] -1, 0]$ . Par continuité de  $f$  et de  $g$  en  $-1$ , la fonction  $g + f$  est constante sur le segment  $[-1, 0]$ . En particulier,

$$\forall x \in [-1, 0], \quad g(x) + f(x) = g(0) + f(0).$$

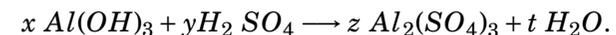
On en déduit :

$$\forall x \in [-1, 0], \quad \arcsin(x) = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

$$24 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C \text{ n'est pas inversible.}$$

$$25 \quad 1-f) \quad 2-a) \quad 3-d) \quad 4-e) \quad 5-c) \quad 6-b)$$

26 Il s'agit de déterminer les coefficients (entiers naturels) à ajouter devant chaque molécule pour obtenir, pour chacun des éléments chimiques intervenant dans la réaction, le même nombre d'atomes du côté des réactifs et du côté des produits. On cherche donc les quadruplets de réels  $(x, y, z, t)$  tels que cette équation soit équilibrée :



Cela donne une équation pour chacun des éléments présents dans l'équation ci-dessus :  $\text{Al}$ ,  $\text{O}$ ,  $\text{H}$ ,  $\text{S}$ .

Du côté des **réactifs** on a :

- $x$  atomes de l'élément  $\text{Al}$
- $3x + 4y$  atomes de l'élément  $\text{O}$
- $3x + 2y$  atomes de l'élément  $\text{H}$
- $y$  atomes de l'élément  $\text{S}$

Du côté des **produits** on a :

- $2z$  atomes de l'élément  $\text{Al}$
- $12z + t$  atomes de l'élément  $\text{O}$
- $2t$  atomes de l'élément  $\text{H}$
- $3z$  atomes de l'élément  $\text{S}$

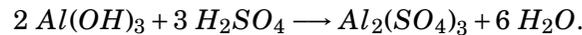
À l'équilibre, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x = 2z & \text{équation pour l'élément Al} \\ 3x + 4y = 12z + t & \text{équation pour l'élément O} \\ 3x + 2y = 2t & \text{équation pour l'élément H} \\ y = 3z & \text{équation pour l'élément S.} \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions qui sont données par :

$$\left(\frac{1}{3}t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{6}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En posant  $t = 6$ , on obtient un quadruplet solution formé d'entiers positifs  $(x, y, z, t) = (2, 3, 1, 6)$  qui conduit à la réaction chimique équilibrée :



38

• Soit  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{1 + (\cos(t))^2} dt$ . Alors,

$$\begin{aligned} \boxed{I} &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos'(t)}{1 + (\cos(t))^2} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(t) \times \frac{1}{1 + (u(t))^2} dt \quad \text{où } u : t \mapsto \cos(t) \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(t) \times \arctan'(u(t)) dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\arctan \circ u)'(t) dt \\ &= - \left[ (\arctan \circ u)(t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= - \left[ \arctan(\cos(t)) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= - \left( \arctan\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \arctan(\cos(0)) \right) \\ &= - \left( \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

• Soit  $J = \int_1^2 \frac{t}{2-t^2} dt$ . On remarque que :

$$J = \int_1^2 \frac{t}{2-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{-2t}{2-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u'(t)}{u(t)} dt,$$

où

$$\forall t \in [1, 2], \quad u(t) = 2 - t^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \boxed{J} &= -\frac{1}{2} \left[ \ln(|u(t)|) \right]_1^2 = -\frac{1}{2} \left[ \ln(|2-t^2|) \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \ln(|-2|) - \ln(|1|) \right) = \boxed{-\frac{\ln(2)}{2}}. \end{aligned}$$

39

• Calculons l'intégrale  $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ , en posant le changement de variable  $x = \sin^2(\theta)$ .

❶ Expression de l'«ancienne» variable  $x$  en fonction de la «nouvelle» variable  $\theta$  :

$$x = \sin^2(\theta) = (\sin(\theta))^2.$$

❷ Expression de  $dx$  en fonction de  $d\theta$  :

$$dx = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta.$$

❸ Détermination des nouvelles bornes :

On remarque que :

- $0 = (\sin(0))^2$
- $1 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$ .

Ainsi, par changement de variable,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(\theta)(1-\sin^2(\theta))} \underline{2 \sin(\theta) \cos(\theta)} \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(\theta)} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \, 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\theta)| \sqrt{\cos^2(\theta)} \, 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\sin(\theta)|}_{=\sin(\theta)} \underbrace{|\cos(\theta)|}_{=\cos(\theta)} \, 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta.
 \end{aligned}$$

Or pour tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :  $\sin(\theta) \geq 0$  et  $\cos(\theta) \geq 0$ . Donc,

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \, d\theta.$$

Linéarisation de l'expression  $\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$  pour tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) &= (\sin(\theta))^2 (\cos(\theta))^2 = \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{-1}{16} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 \\
 &= \frac{-1}{16} \left( (e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right)^2 \\
 &= \frac{-1}{16} \left( (e^{i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^2 \right)^2 \\
 &= \frac{-1}{16} (e^{i2\theta} - e^{-2i\theta})^2 \\
 &= \frac{-1}{16} \left( (e^{i2\theta})^2 - 2 \underbrace{e^{i2\theta} e^{-2i\theta}}_{=1} + (e^{-2i\theta})^2 \right) \\
 &= \frac{-1}{16} (e^{i4\theta} - 2 + e^{-4i\theta}) \\
 &= \frac{-1}{16} \left( \underbrace{e^{i4\theta} + e^{-4i\theta}}_{=2 \cos(4\theta)} - 2 \right) \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4\theta).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer  $I$  :

$$\begin{aligned}
 \boxed{I} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4\theta) \right) \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \, d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{8} \left[ \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} \left( \frac{\sin(2\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{0} \right) = \boxed{\frac{\pi}{8}}.
 \end{aligned}$$

- Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n} \times n\right) \left(n - \left(\frac{k}{n} \times n\right)\right)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 \left(\frac{k}{n}\right) \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right) \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right) \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

où  $f$  est la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sqrt{x(1-x)}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f\left(0+k \frac{1-0}{n}\right).$$

La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  (comme composée de fonctions continues, car la fonction racine carrée est continue sur  $[0, +\infty[$  et la fonction  $x \mapsto x(1-x)$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ ). Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f\left(0+k \frac{1-0}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) dx.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

**40** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ .

- Étudions la limite de la suite  $(S_n)_n$ .

Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où la fonction  $f$  est définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f\left(0+k \frac{1-0}{n}\right).$$

$S_n$  est donc une somme de Riemman de  $f$  sur le segment  $[0, 1]$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  donc, d'après le cours, la suite  $(S_n)_n$  de ses sommes de Riemman converge vers  $\int_0^1 f(x) dx$  :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

- Cherchons un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Rappel :**  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ .

Par définition de  $S_n$  on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{3}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{\frac{2}{3} n \sqrt{n}} = 1.$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}.$$

41

1. (a) Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad g(t) = \frac{e^t}{t}.$$

On sait que la fonction  $g$  est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  (comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ ). Par conséquent,  $g$  admet des primitives sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Soit  $G$  une primitive de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ . Alors, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt = \int_x^{2x} G'(t) dt = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x).$$

Or, la fonction  $G$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , donc, par composition, la fonction  $x \mapsto G(2x)$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Ainsi,  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme différence de deux fonctions qui le sont. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, +\infty[, \quad f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= 2 \frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x}{x}. \end{aligned}$$

- (b) De même, la fonction  $g$  étant continue sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$ , elle admet des primitives sur cet intervalle. Soit  $H$  une primitive de  $g$  sur  $]-\infty, 0[$ . Alors, pour tout  $x \in ]-\infty, 0[$ ,

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt = \int_x^{2x} H'(t) dt = H(2x) - H(x).$$

Comme dans (a), on peut en déduire que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et :

$$\forall x \in ]-\infty, 0[, \quad f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

- (c) D'après les questions (a) et (b), la fonction  $f$  est dérivable sur l'ensemble  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ = \mathbb{R}^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

2. (a) Soit  $x > 0$ . Alors  $x < 2x$  et :

$$\begin{aligned} t \in [x, 2x] &\implies \begin{cases} e^x \leq e^t \leq e^{2x} & \text{car la fonction exp est croissante} \\ \frac{1}{t} > 0 & \text{car } t \geq x > 0 \end{cases} \\ &\implies \frac{1}{t} \times e^x \leq \frac{1}{t} \times e^t \leq \frac{1}{t} \times e^{2x} \\ &\implies \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}.$$

En intégrant cet encadrement sur  $[x, 2x]$ , on obtient :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt,$$

i.e.

$$e^x \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{=I} \leq f(x) \leq e^{2x} \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{=I}.$$

Calculons l'intégrale  $I = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ . Puisque  $x > 0$  et  $2x > 0$ ,

$$I = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \left[ \ln(|t|) \right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2).$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln(2)e^x \leq f(x) \leq \ln(2)e^{2x}}. \quad (1)$$

(b) Soit  $x < 0$ . Alors  $x > 2x$ . On applique donc le même raisonnement que dans la question précédente mais sur le segment  $[2x, x]$  :

$$\begin{aligned} t \in [2x, x] &\Rightarrow \begin{cases} e^{2x} \leq e^t \leq e^x & \text{car la fonction exp est croissante} \\ \frac{1}{t} < 0 & \text{car } t \leq x < 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{t} \times e^{2x} \geq \frac{1}{t} \times e^t \geq \frac{1}{t} \times e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t \in [2x, x], \quad \frac{e^{2x}}{t} \geq \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^x}{t}.$$

En intégrant cet encadrement sur  $[2x, x]$ , on obtient :

$$\int_{2x}^x \frac{e^{2x}}{t} dt \geq \int_{2x}^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_{2x}^x \frac{e^x}{t} dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{2x}^x \frac{e^{2x}}{t} dt &\geq \int_{2x}^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_{2x}^x \frac{e^x}{t} dt \\ \Leftrightarrow -\int_{2x}^x \frac{e^{2x}}{t} dt &\leq -\int_{2x}^x \frac{e^t}{t} dt \leq -\int_{2x}^x \frac{e^x}{t} dt \\ \Leftrightarrow \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt &\leq \underbrace{\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt}_{=f(x)} \leq \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \\ \Leftrightarrow e^{2x} \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{=J} &\leq f(x) \leq e^x \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{=J}, \end{aligned}$$

où

$$J = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \left[ \ln(|t|) \right]_x^{2x} = \ln(|2x|) - \ln(|x|) = \ln(2(-x)) - \ln(-x) = \ln(2).$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{\forall x < 0, \quad \ln(2)e^{2x} \leq f(x) \leq \ln(2)e^x}. \quad (2)$$

3. **Rappel** : on dit qu'une fonction  $f$  définie sur  $I \setminus \{a\}$  où  $I$  est un intervalle non vide est **prolongeable par continuité au point  $a$**  si  $f$  admet une limite finie en  $a$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(2)e^x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(2)e^{2x} = \ln(2)$ , le théorème des gendarmes permet de déduire :

- de l'encadrement (1) de la question 2.(a), que  $f$  admet une limite à droite en 0 et que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$ ,
- de l'encadrement (2) de la question 2.(b), que  $f$  admet une limite à gauche en 0 et que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln(2)$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln(2)$ ,  $f$  admet une limite en 0 et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2).$$

La fonction  $f$  admet donc une limite finie en 0. Par conséquent, la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = \ln(2)$ .

63

1. On remarque que :

- pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{cases} \lambda \vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 0) \neq \vec{v}_2 \\ \lambda \vec{v}_2 = (4\lambda, \lambda, 4\lambda) \neq \vec{v}_1 \end{cases}$ , donc les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ne sont pas colinéaires ;
- pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{cases} \lambda \vec{v}_1 = (\lambda, \lambda, 0) \neq \vec{v}_3 \\ \lambda \vec{v}_3 = (2\lambda, -\lambda, 4\lambda) \neq \vec{v}_1 \end{cases}$ , donc les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas colinéaires ;
- pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{cases} \lambda \vec{v}_2 = (4\lambda, \lambda, 4\lambda) \neq \vec{v}_3 \\ \lambda \vec{v}_3 = (2\lambda, -\lambda, 4\lambda) \neq \vec{v}_2 \end{cases}$ , donc les vecteurs  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas colinéaires.

2. Résolvons l'équation ci-dessous d'inconnue  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}. \quad (\star)$$

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} (\star) &\iff \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(4, 1, 4) + \lambda_3(2, -1, 4) = (0, 0, 0) \\ &\iff (\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 4\lambda_2 + 4\lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda_3 \vec{v}_1 - \lambda_3 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

En particulier, pour  $\lambda_3 = 1$ , on obtient la relation :

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3.$$

Ainsi, la famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  est liée.

**64** Considérons les vecteurs  $u = (-2, 0, 1, -2)$ ,  $v = (0, -3, -1, -1)$  et  $w = (0, 1, 0, 3)$  de  $\mathbb{R}^4$ .

• **Étude de la liberté de  $(u, v, w)$**

— **1ère méthode.** La famille  $(u, v, w)$  est libre si et seulement si l'équation

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \vec{0}_{\mathbb{R}^4} \quad (\star)$$

d'inconnue  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  admet  $(0, 0, 0)$  comme unique solution. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} (\star) &\iff \lambda_1(-2, 0, 1, -2) + \lambda_2(0, -3, -1, -1) + \lambda_3(0, 1, 0, 3) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff (-2\lambda_1, -3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2, -2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0, 0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -2\lambda_1 = 0 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille  $(u, v, w)$  est libre.

— **2ème méthode.** Une famille de 3 vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal à 3. Donc  $(u, v, w)$  est libre si et seulement si  $\text{rang}(u, v, w) = 3$ . Calculons le rang de la famille  $(u, v, w)$  en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice  $A$  formée par les coordonnées des vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans la base canonique de

$\mathbb{R}^4$  :

$$A = \begin{array}{ccc|ccc} & C_1 & C_2 & C_3 & & & \\ \hline & -2 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & -3 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & 0 & & & \\ & -2 & -1 & 3 & & & \end{array} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{array}{ccc|ccc} & -2 & 0 & 0 & & & \\ \hline & 0 & 1 & -3 & & & \\ & 1 & 0 & -1 & & & \\ & -2 & 3 & -1 & & & \end{array} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2} \begin{array}{ccc|ccc} & -2 & 0 & 0 & & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & -1 & & & \\ & -2 & 3 & 8 & & & \end{array}$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 3 colonnes non nulles.  
Donc  $\text{rang}(u, v, w) = 3$ . Par conséquent, la famille  $(u, v, w)$  est libre.

• **Étude du caractère générateur de la famille  $(u, v, w)$**

D'après le cours, une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$  est nécessairement formée d'au moins  $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$  vecteurs. La famille  $(u, v, w)$  n'étant formée que de 3 vecteurs, elle n'est pas génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

**65** On considère les vecteurs  $I, J, K, L$  de  $M_2(\mathbb{R})$  suivants :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. • **1ère méthode : avec la définition d'une famille libre.**

Les vecteurs  $I, J, K$ , et  $L$  sont linéairement indépendants (i.e. la famille  $(I, J, K, L)$  est libre) si et seulement si l'équation

$$\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L = 0_{M_2(\mathbb{R})} \quad (*)$$

d'inconnue  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$  admet  $(0, 0, 0, 0)$  comme unique solution.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ .

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 & L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_3 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -2\lambda_4 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0).$$

On en déduit que la famille  $(I, J, K, L)$  est libre.

• **2ème méthode : en utilisant le rang d'une famille de vecteurs.**

Une famille de 4 vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal à 4. Donc la famille  $(I, J, K, L)$  est libre si et seulement si

$$\text{rang}(I, J, K, L) = 4.$$

Calculons  $\text{rang}(I, J, K, L)$  en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice  $A$  formée par les coordonnées des vecteurs  $I, J, K$  et  $L$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$  de  $M_2(\mathbb{R})$  définie par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - C_1} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_2} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 4 colonnes non nulles.

Donc  $\text{rang}(I, J, K, L) = 4$ . Ainsi, la famille  $(I, J, K, L)$  est libre.

2.  $M_2(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel de dimension 4. La famille  $(I, J, K, L)$  est une famille libre formée de 4 vecteurs de  $M_2(\mathbb{R})$ . Par conséquent c'est une base de  $M_2(\mathbb{R})$ . Donc tout vecteur de  $M_2(\mathbb{R})$  s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs  $I, J, K$  et  $L$ , autrement dit :

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4, \quad M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L.$$

66

1. Soit  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$ . On remarque que  $E$  est un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites réelles. On sait que  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Démontrons que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- (i) Le vecteur nul  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est la suite constante de terme général 0. Elle converge vers 0. Donc  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$ .
- (ii) Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . Par définition de  $E$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes. Notons  $\ell_u$  et  $\ell_v$  leurs limites respectives. On sait que la suite  $u + v$  de terme général  $u_n + v_n$  converge vers  $\ell_u + \ell_v$ . Par conséquent :  $u + v \in E$ .  
Ainsi,  $E$  est stable par addition.

- (iii) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Notons  $\ell$  sa limite. Alors la suite  $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell u$ .  
Donc :  $\lambda u \in E$ .  
Par conséquent,  $E$  est stable par multiplication externe.

On déduit des points (i), (ii) et (iii) que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Ainsi,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

2. Notons  $F$  l'ensemble des suites constantes et  $G$  l'ensemble des suites convergent vers 0.

- $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En effet,  $F \subset E$  (car une suite constante est convergente) et  $F \neq \emptyset$  (car  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ ). De plus,  $F$  est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs car : pour tout nombre réel  $\lambda$ , si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites constantes alors la suite  $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.
- $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En effet, par définition de  $G$ , on a :  $G \subset E$ . De plus,  $G \neq \emptyset$  (car  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in G$ ). D'autre part,  $G$  est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs car : pour tout nombre réel  $\lambda$ , si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites convergent vers 0 alors la suite  $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda 0 + 0 = 0$ .
- Démontrons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ , i.e.

$$\forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w.$$

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . Démontrons, en raisonnant par analyse-synthèse, qu'il existe un unique couple  $(v, w) \in F \times G$  tel que  $u = v + w$ .

— **Analyse.** Supposons qu'il existe  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$  et  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$  tels que  $u = v + w$ , i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + w_n.$$

Par définition de  $F$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante donc il existe un réel  $c$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = c$ .

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c + w_n.$$

Or, par définition de  $E$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, et par définition de  $G$ , la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Donc, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$ . Par conséquent, les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont entièrement déterminées par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_n = c, \\ w_n = u_n - c, \end{cases} \quad (\star)$$

où  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

- **Synthèse.** Considérons les suites  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $(\star)$  où  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Donc :  $(v, w) \in F \times G$ . De plus, il est évident que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n,$$

i.e.

$$u = v + w.$$

- **Conclusion.** On a donc démontré qu'il existe un unique couple  $(v, w) \in F \times G$  tel que  $u = v + w$ .

Ainsi,

$$\forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w.$$

Donc  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

**67** Soit  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ , où  $v_1 = (0, 1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (1, 2, 3, 4)$  et  $v_3 = (2, 3, 4, 5)$ . Alors,

$$\dim(F) = \dim(\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)) = \text{rang}(v_1, v_2, v_3).$$

Calculons  $\text{rang}(v_1, v_2, v_3)$  en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice  $A$  formée par les coordonnées des vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$

dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 2 colonnes non nulles. Donc  $\text{rang}(v_1, v_2, v_3) = 2$ . Par conséquent,  $\dim(F) = 2$ .

De plus,  $F = \text{Vect}((1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3))$  et la famille  $((1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3))$  est une base de  $F$ .

**68** Soit  $S_2(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels. Alors,

$$S_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}), {}^t M = M\}.$$

Soit  $M \in M_2(\mathbb{R})$ . Alors  $M$  s'écrit de manière unique sous la forme  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et on a la caractérisation suivante :

$$\begin{aligned} M \in S_2(\mathbb{R}) &\iff {}^t M = M \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff b = c \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_2(\mathbb{R}) &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que  $S_2(\mathbb{R})$  est le sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$  engendré par les trois matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**69** Soient  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $(\vec{u}, \vec{v})$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  définis par :

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}, \quad \vec{v} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j},$$

où  $\theta$  est un nombre réel fixé tel que  $\theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

1. Montrons que la famille  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$  est libre. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}) + \lambda_2 (\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2)\vec{i} + (-\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2)\vec{j} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = 0 & (L_1) \\ -\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2 = 0 & (L_2) \end{cases} \quad \text{car } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ est libre}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = 0 \\ (\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_{=1})\lambda_2 = 0 & L_2 \leftarrow \underbrace{\cos(\theta)}_{\neq 0} L_2 + \sin(\theta)L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

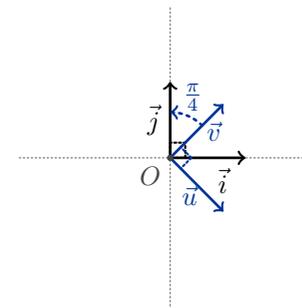
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{car } \cos(\theta) \neq 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0).$$

L'équation  $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$  d'inconnue  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  admet donc  $(0, 0)$  comme unique solution. Par conséquent, la famille  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$  est libre. Il s'agit d'une famille formée de 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Puisque  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2, on en déduit que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Représentons ci-dessous les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  :



3. Soit  $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Notons  $m_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $m$  dans la base  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ . Déterminons alors les réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$m_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \lambda_1 (\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}) + \lambda_2 (\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j})$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (\cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2)\vec{i} + (-\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (\cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2, -\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = x & (L_1) \\ -\sin(\theta)\lambda_1 + \cos(\theta)\lambda_2 = y & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = x \\ (\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_{=1})\lambda_2 = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y & L_2 \leftarrow \underbrace{\cos(\theta)}_{\neq 0} L_2 + \sin(\theta)L_1. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 m_{\mathcal{B}'} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 + \sin(\theta)\lambda_2 = x \\ \lambda_2 = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 = \underbrace{(1 - \sin^2(\theta))x}_{=\cos^2(\theta)} - \sin(\theta)\cos(\theta)y \\ \lambda_2 = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \cos(\theta)\lambda_1 = \cos(\theta)(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) \\ \lambda_2 = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda_1 = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y & \text{car } \cos(\theta) \neq 0 \\ \lambda_2 = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$m_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}.$$

On remarque que :

$$m_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{=R} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=m_{\mathcal{B}}} = R m_{\mathcal{B}}.$$

La matrice  $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  est appelée matrice de rotation d'angle

$\theta$  dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**82** On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Soit  $x$  au voisinage de 0. D'après les développements limités usuels en 0 :

$$\begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x) \\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_2(x) \end{cases}$$

où les fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ont pour limite 0 en 0. Ainsi,

$$e^x - \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + x^4 \varepsilon_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_3(x),$$

où  $\varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Par conséquent le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\varphi$  est donné par :

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon_3(x).$$

2. On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon_3(x)\right) = 1.$$

3. On prolonge  $\varphi$  par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 1$ . Soit  $f$  définie par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

(a) Les fonctions  $\exp$ ,  $\cos$  et  $x \mapsto x$  sont continues sur  $\mathbb{R}^*$ . Donc la fonction  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{e^x - \cos(x)}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  comme différence et quotient de fonctions continues. De plus, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$ , on prolonge  $\varphi$  par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 1$ . La fonction  $\varphi$  ainsi prolongée est donc continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle admet par conséquent des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$$

existe. On sait par ailleurs que la fonction  $f$  ainsi définie est l'unique primitive de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0. Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \varphi(x).$$

(b) Soit  $x$  au voisinage de 0. D'après la question 1,

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon_3(x).$$

Donc  $f'$  admet un  $DL_1(0)$  donné par :

$$f'(x) = 1 + x + x\varepsilon_4(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

En intégrant ce développement limité, on obtient le  $DL_2(0)$  de  $f$  :

$$f(x) - f(0) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5(x) = 0.$$

Par définition de  $f$ , on a  $f(0) = 0$ . Donc le  $DL_2(0)$  de  $f$  est donné par :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x).$$

- (c) On déduit de ce développement limité que l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  au point d'abscisse 0 est  $y = x$ . De plus, pour tout  $x$  au voisinage de 0, on a :

$$\begin{cases} f(x) - x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x) \\ x^2 \geq 0, \end{cases}$$

donc  $f(x) - x \geq 0$  ; autrement dit,  $f(x) \geq x$ .

Cela signifie que  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de  $T$  au voisinage de 0.

4. On considère la fonction  $g$  définie par, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$g(x) = x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

- (a) Soit  $x$  au voisinage de  $+\infty$ . Posons  $h = \frac{1}{x}$ , de sorte que  $h$  soit au voisinage de 0. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= x \left( e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( e^h - \cos(h) \right) = \varphi(h) \end{aligned}$$

D'après la question 1,  $\varphi$  admet pour  $DL_3(0)$  :

$$\varphi(h) = 1 + h + \frac{h^2}{6} + h^3\varepsilon_3(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0.$$

Donc  $\varphi$  admet un  $DL_2(0)$  donné par :

$$\varphi(h) = 1 + h + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon_6(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_6(h) = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= 1 + h + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon_6(h) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right),$$

où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_6(h) = 0$ . On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{6x} + \frac{1}{x} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0.$$

Ainsi  $\mathcal{C}_g$  admet en  $+\infty$  une asymptote  $\mathcal{D}_{+\infty}$  d'équation  $y = x + 1$ .

De plus, pour tout  $x$  au voisinage de  $+\infty$  on a :

$$\begin{cases} g(x) - (x + 1) = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) \\ \frac{1}{6x} > 0, \end{cases}$$

donc  $g(x) - (x + 1) > 0$  et  $g(x) > x + 1$ .

Donc,  $\mathcal{C}_g$  est située au-dessus de  $\mathcal{D}_{+\infty}$ .

- (b) Soit  $x$  au voisinage de  $-\infty$  et soit  $h = \frac{1}{x}$ . Puisque  $h$  est au voisinage de 0, on peut reprendre le résultat de la question précédente :

$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right),$$

où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_6(h) = 0$ .

Donc  $\mathcal{C}_g$  admet en  $-\infty$  une asymptote  $\mathcal{D}_{-\infty}$  d'équation  $y = x + 1$ .

Par ailleurs, pour tout  $x$  au voisinage de  $-\infty$  on a :

$$\begin{cases} g(x) - (x+1) = \frac{1}{6x} + \frac{1}{x} \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) \\ \frac{1}{6x} < 0, \end{cases}$$

donc  $g(x) - (x+1) < 0$  et  $g(x) < x+1$ .

Ainsi, au voisinage de  $-\infty$ ,  $\mathcal{C}_g$  est située en-dessous de  $\mathcal{D}_{-\infty}$ .

83

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . D'après les développements limités usuels :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \alpha(\alpha-1) \frac{u^2}{2!} + u^2 \varepsilon_1(u), \quad \text{où } \varepsilon_1(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

2. Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction  $f$  définie sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ .

Soit  $x$  au voisinage de 0. On sait que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_2(x), \quad \text{où } \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\cos x} \\ &= \sqrt{1+u} \quad \text{où } u = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= (1+u)^\alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_1(u) \\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2 \varepsilon_1(u). \end{aligned}$$

Puisque  $u = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x)$ , on a  $u^2 = x^2 \varepsilon_3(x)$  où  $\varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . On en déduit finalement que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $f$  est donné par :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

3. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par :

$$g(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{\cos t} dt.$$

La fonction  $\cos$  est continue sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et à valeurs dans  $[0, +\infty[$ . La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , donc par composition la fonction  $f$  est continue sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .  $f$  admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . On peut alors écrire :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad g(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt = 1 + [F(t)]_0^x = 1 + F(x) - F(0).$$

La fonction  $F$  étant dérivable sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on en déduit que  $g$  l'est aussi et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad g'(x) = F'(x) = f(x) = \sqrt{\cos x}.$$

4. D'après les questions 2 et 3, la fonction  $g'$  admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné par :

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

En intégrant ce développement limité, on en déduit que la fonction  $g$  admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 donné par :

$$g(x) = g(0) + x - \frac{x^3}{12} + x^3 \varepsilon_5(x), \quad \varepsilon_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Or,  $g(0) = 1 + \int_0^0 f(t) dt = 1$ . On obtient donc :

$$g(x) = 1 + x - \frac{x^3}{12} + x^3 \varepsilon_5(x).$$

5. (a) On déduit du développement limité précédent que la tangente ( $T$ ) au point d'abscisse 0 à la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  a pour équation  $y = 1 + x$ .

(b) La position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$  au voisinage de 0 est donnée par l'étude locale du signe de :

$$g(x) - (1 + x) = -\frac{x^3}{12} + x^3 \varepsilon_5(x),$$

où  $\varepsilon_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Au voisinage de 0,  $-\frac{x^3}{12}$  change de signe, donc  $\mathcal{C}$  traverse ( $T$ ) (autrement dit, 0 est un point d'inflexion pour  $g$ ).

- Si  $x < 0$ , alors  $x^3 < 0$ , donc  $g(x) - (1 + x) > 0$ . Par conséquent,  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de ( $T$ ) au voisinage de  $0^-$ .
- Si  $x > 0$ , alors  $x^3 > 0$  et  $-\frac{x^3}{12} < 0$ , donc  $g(x) - (1 + x) < 0$ . Ainsi,  $\mathcal{C}$  est située en-dessous de ( $T$ ) au voisinage de  $0^+$ .

**128** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. (a) Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ -x + y + z = y \\ -x + 2z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \iff -x + z = 0 \iff z = x \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) On considère l'ensemble  $E_1$  défini par :

$$E_1 = \left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = X \right\}.$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x u_1 + y u_2, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \end{aligned}$$

où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

$E_1$  est donc un sous-espace vectoriel de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  : c'est le sous-espace vectoriel de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  engendré par les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  définis ci-dessus. La famille  $(u_1, u_2)$  est donc génératrice de  $E_1$ . De plus, les deux vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas colinéaires car :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u_1 \neq \lambda u_2 \text{ et } u_2 \neq \lambda u_1.$$

Par conséquent la famille  $(u_1, u_2)$  est libre.

Ainsi,  $(u_1, u_2)$  est une base de  $E_1$ . D'où,  $\dim(E_1) = 2$ .

2. (a) Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 2x \\ -x + y + z = 2y \\ -x + 2z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) On considère l'ensemble  $E_2$  défini par :

$$E_2 = \left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 2X \right\}.$$

D'après la question précédente :

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \{y u_3, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_3),$$

où

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$E_2$  est donc un sous-espace vectoriel de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  : c'est le sous-espace vectoriel de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  engendré par le vecteur  $u_3$ .

La famille  $(u_3)$  est donc une base de  $E_2$ . D'où,  $\dim(E_2) = 1$ .

3. Déterminons une base et la dimension de  $E_1 + E_2$ . D'après les questions précédentes,

$$E_1 + E_2 = \text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

Par conséquent la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est génératrice de  $E_1 + E_2$ . Notons  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer une base de  $E_1 + E_2$ , appliquons l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice  $M = (u_1)_{\mathcal{B}} | (u_2)_{\mathcal{B}} | (u_3)_{\mathcal{B}}$ .

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée formée de 3 colonnes non nulles, donc  $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 3$  et la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre. La famille

$(u_1, u_2, u_3)$  est donc une base de  $E_1 + E_2$ . D'où  $\dim(E_1 + E_2) = 3$ .

**Remarque.** On peut aussi choisir comme base de  $E_1 + E_2$  la famille  $(u, v, w)$  définie par

$$u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire par  $u = u_1, v = e_2$  et  $w = e_3$ .

4. Démontrons que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .

- On a démontré dans la question précédente que  $\dim(E_1 + E_2) = 3$ , donc :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(M_{3,1}(\mathbb{R})).$$

Par conséquent,  $\underline{E_1 + E_2 = M_{3,1}(\mathbb{R})}$ .

- D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Donc,

$$\dim(E_1 \cap E_2) = \underbrace{\dim(E_1)}_{=2 \text{ d'après 1(b)}} + \underbrace{\dim(E_2)}_{=1 \text{ d'après 2(b)}} - \underbrace{\dim(E_1 + E_2)}_{=3 \text{ d'après 3}} = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Ainsi,  $\underline{E_1 \cap E_2 = \{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}}$ .

On en déduit que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$\boxed{E_1 \oplus E_2 = M_{3,1}(\mathbb{R})}.$$

5. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  la base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  définie par :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3.$$

Notons que :

$$(u_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1, \quad (u_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2, \quad (u_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3.$$

Soit  $f \in \mathcal{L}(M_{3,1}(\mathbb{R}))$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\begin{cases} (f(u_1))_{\mathcal{B}} = A (u_1)_{\mathcal{B}} = Au_1 \\ (f(u_2))_{\mathcal{B}} = A (u_2)_{\mathcal{B}} = Au_2 \\ (f(u_3))_{\mathcal{B}} = A (u_3)_{\mathcal{B}} = Au_3. \end{cases}$$

Or, puisque  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_1$ , on a  $Au_1 = u_1$  et  $Au_2 = u_2$  (par définition de  $E_1$ ). De même,  $u_3 \in E_2$  donc  $Au_3 = 2u_3$  (par définition de  $E_2$ ). Ainsi,

- $(f(u_1))_{\mathcal{B}} = u_1 = (u_1)_{\mathcal{B}}$  donc  $f(u_1) = u_1$ ,
- $(f(u_2))_{\mathcal{B}} = u_2 = (u_2)_{\mathcal{B}}$  donc  $f(u_2) = u_2$ ,
- $(f(u_3))_{\mathcal{B}} = 2u_3 = 2(u_3)_{\mathcal{B}} = (2u_3)_{\mathcal{B}}$ , donc  $f(u_3) = 2u_3$ .

Par conséquent, la matrice de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  est donnée par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** on aurait pu aussi calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$  en utilisant respectivement la 1ère, la 2ème et la 3ème colonne de la matrice  $A$ ,

$$\begin{cases} f(e_1) = 1e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_3) = 0e_1 + 1e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

puis en déduire  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  par linéarité de  $f$  :

$$\begin{cases} f(u_1) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \\ f(u_2) = f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2 \\ f(u_3) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_3 \end{cases}$$

et obtenir enfin la matrice de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$