Devoir à la Maison n°1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier et sauf mention contraire, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1. On a vu en cours le *développement en série entière* de la fonction exponentielle, i.e. :

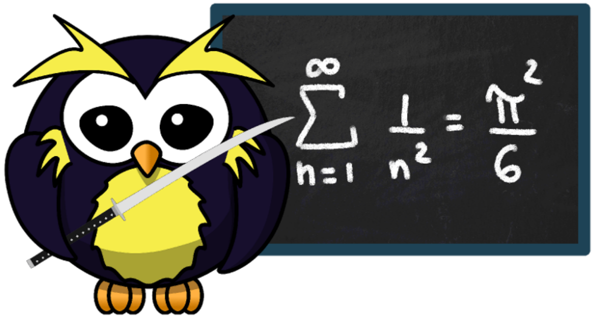
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une formule analogue pour $x \mapsto \ln(1-x)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \in]-1,1[$ et $t \in]-1,1[$.

1. Rappeler (sans justifier) la valeur de la somme :
$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k.$$
2. En intégrant le résultat de la question précédente, démontrer que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit :
$$I_n = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que I_n converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
4. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Exercice 2. On admet la formule suivante :



1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier :
$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$$
2. Démontrer la convergence et calculer la somme de la série :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 3. Soit $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ où :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n\ln(n)^\beta}.$$

1. Démontrer que si $\beta \leqslant 0$ alors la série diverge.
2. Soit $A > 2$. Calculer :
$$I_A = \int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t.$$
3. Déduire des questions précédentes que la série converge si et seulement si $\beta > 1$ (le cas $\beta = 1$ a été traité en TD).