# Examen final - MTC1

*La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.**
**Les trois exercices seront rendus sur trois copies différentes.**

## Exercice 1 : diagonalisation ( 7 points )

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Pour toute matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on définit l'ensemble suivant :

$$F(A) = \left\{ M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; AM = M \right\}$$

1. Montrer que $F(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Pour la suite de l'exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de $A$.
   Justifier que $A$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) On admettra pour la suite de l'exercice que les valeurs propres de $A$ sont : 0; 1 et 2.
   Déterminer les trois sous-espaces propres de $A$.
   (c) En déduire une matrice diagonale $D$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P$, telles que $A = PDP^{-1}$. *On ne calculera pas $P^{-1}$.*
3. Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = P^{-1}M$.
   (a) Montrer que : $M \in F(A) \iff N \in F(D)$.
   (b) Montrer que : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in F(D) \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire la dimension de $F(A)$.

## Exercice 2 : séries et intégrales généralisées ( 7 points )

1. (a) Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
   (b) On se fixe un réel $x$ strictement positif. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

2. (a) Déterminer $\lim_{u \to +\infty} u^{3/2} \left( \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \right)$

   (b) Démontrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

3. On se fixe un réel $x$ strictement positif. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}$

   (a) On admet que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1\,,\,+\infty[$. Montrer que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \quad \text{et que} \quad \forall\, k \geqslant 2,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

   (c) En déduire par un changement de variable, que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant S(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\,S(x)$

**Exercice 3 : produit scalaire** ( 7 points )

Soit $n$ un entier naturel non nul. On désigne par $E$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$ et on définit l'application $\varphi$ comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On note $\mathcal{P} = \{g \in E \mid \forall\, x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x)\}$ et $\mathcal{I} = \{h \in E \mid \forall\, x \in \mathbb{R},\ h(-x) = -h(x)\}$ les sous-espaces vectoriels de $E$ constitués respectivement des fonctions polynomiales paires et impaires.

1. Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

2. Prouver que si $g \in \mathcal{P}$ et si $h \in \mathcal{I}$ alors $\varphi(g,h) = 0$.

3. À toute fonction $f$ de $E$ on associe la fonction $\widehat{f} \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\,(f(x) + f(-x)) \end{array}$

   (a) Vérifier que $\forall f \in E, \quad \widehat{f} \in \mathcal{P}$.

   (b) Vérifier que $\forall f \in E, \quad \left(f - \widehat{f}\,\right) \in \mathcal{I}$.

   (c) En déduire que l'application $p\colon f \longmapsto \widehat{f}$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $E$, que l'on précisera *(on prendra soin de bien citer le résultat de cours correspondant)*.