Applications linéaires

1 Pour s'entraîner

1 Déterminer la matrice de chacune des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (4x - y, 6y, -x + y)$
2. $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(1), P'(1), P''(1))$
3. $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P'$

2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. Calculer la trace de f.

3

1. Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que p est une projection vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.
2. Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que s est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

4 On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathscr{B}_0$. On considère le vecteur $w = (1,1,1)$. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\right\} \qquad \text{et } G = \text{Vect}(w).$$

1. (a) Déterminer une base de F.
   (b) Démontrer que $E = F \oplus G$.
2. Soit p la projection vectorielle sur F parallèlement à G. On note (u,v) une base de F, et on considère la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ de E.
   (a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
3. En déduire la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de s, symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à G.

5 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application f définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P + (X-2)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de E.
3. Que vaut la trace de f ?
4. (a) Quel est le rang de f ? Que peut-on en déduire ?
   (b) Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique de E.
   (c) On pose $P = aX^2 + bX + c$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Expliciter le polynôme $f^{-1}(P)$.

6 Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $AB - BA = A$.

1. Que dire de la trace de A ? De celle de A^2 ?
2. (*) Déterminer la trace de A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

2 Pour approfondir

7 Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel F de E défini par

$$F = \{f \in E,\ f(\ln 3) = 0\},$$

ainsi que G, sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions constantes.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer l'expression de $p(f)$, où $f : x \mapsto e^x$.

8 Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x) & = & \mathrm{e}^{2x} \\ f_2(x) & = & x\,\mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) & = & x^2\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \right.$$

On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel engendré par ces 3 fonctions.

1. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de E. En déduire la dimension de E.
2. Soit D l'application définie sur E par : $\forall f \in E, D(f) = f'$.
   Démontrer que D est un automorphisme de E et donner sa matrice A dans la base $\mathscr{B}$.
3. (a) On pose $N = A - 2I_3$. Calculer N^2 et N^3.
   (b) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
4. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x^2 - 1)\mathrm{e}^{2x}$.
   Expliciter la dérivée $n-$ième de g.

9 Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice A de f a ses $n-1$ premières colonnes égales à la colonne nulle.
   (b) En déduire que $f \circ f = \mathrm{Tr}(f) f$ puis que f est un projecteur de E.
2. On suppose à présent que f est un projecteur de E.
   Démontrer que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{rg}(f)$.

10 Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n, et soient p et q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Démontrer que $p + q$ est un projecteur de E.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
3. Démontrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

3 Pour travailler seul

11

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1) \quad ; \quad f(1,1,0) = (1,0) \qquad f(1,1,1) = (1,1)$$

2. Calculer $f(x, y, z)$ pour tous réels x, y et z.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

12 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f$ est l'application nulle sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.
2. On suppose de plus que $f \neq \widetilde{0_{\mathbb{R}^3}}$.
   Peut-on avoir $\mathrm{rg}(f) = 0$? $\mathrm{rg}(f) = 3$? $\mathrm{rg}(f) = 2$?
   En déduire le rang de f par disjonction des cas.

13 Calculer le rang de chacune des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

MT3F - Automne 2022

Intégration sur un intervalle

1 Pour s'entraîner

14 1. Soient x et a des réels strictement positifs.
Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_2^x \frac{1}{t(t-1)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$$

Pour la deuxième intégrale, on pourra remarquer que $1 = t-(t-1)$.

2. En déduire la convergence et la valeur de chacune des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t$$

15 Étudier la nature des intégrales généralisées et calculer ces intégrales lorsqu'elles sont convergentes

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}}\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{1-\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t$

16 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < x < \frac{1}{2}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t(1-\ln t)^2}$.
Vous pourrez utiliser le changement de variable $u = \ln t$.

2. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t(1-\ln t)^2}$ converge et préciser sa valeur.

17 Justifier l'existence et calculer les intégrales généralisées :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}\mathrm{d}t$

18 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Calculer pour tout réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^n}\mathrm{d}t$.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n}\mathrm{d}t$.

19 1. Soit x un réel tel que $x \geqslant 1$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$.

2. En déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$, et sa valeur.

20 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+5x^2+4}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\cos t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3+1}\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{3t^4+t^2}}\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{e^{2\sqrt{x}}-1}{x^2}\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4}\mathrm{d}x$

21 Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On note I_β l'intégrale

$$I_\beta = \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}.$$

Soit $x \geqslant e$. En utilisant le changement de variable $u = \ln t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$, déterminer la nature de I_β suivant les valeurs de β.

22 Pour tout $\alpha > 0$, on pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour tout $\alpha > 0$.
2. Calculer $\Gamma(1)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
   (b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

23

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$,
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. (a) Montrer par une méthode analogue à la précédente, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) ⋆ Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.
   En déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que les intégrales I_n et J_n sont convergentes.
2. Calculer $I_n + J_n$.
3. Soit $A > 0$. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{A}}^{A} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\mathrm{d}x$, montrer que $I_n = J_n$.
4. En déduire la valeur de I_n et de J_n.

25

1. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{n+1}}$ est convergente. On pose alors $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{n+1}}$
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. On se fixe un entier naturel n non nul.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{n+1}}$ est convergente.
   On note alors K_n sa valeur.
   (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple que
   $$K_n = \int_1^{+\infty} \frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{t^n(1+t^n)} = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$
   (c) Vérifier que pour tout réel $u > 0$, $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u}$
   En déduire la valeur de K_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n}$.
   En déduire la convergence et la limite de la suite (I_n).

26 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(1)$. Calculer $f(1/2)$ par changement de variable.

3. Quel est le sens de variation de f ?
4. Déterminer $f(x)+f(x+1)$ pour $x>0$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$. Calculer $f(2)$ et $f(3/2)$.

27 Pour tout réel x appartenant à $]0,1[$, on pose : $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Calculer pour tout réel $x\in]0,1[$ l'intégrale $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$
   (b) Justifier que F est bien définie et que
   $$\forall x\in]0,1[,\ x^2\ln 2\leqslant F(x)\leqslant x\ln 2$$
   (c) En déduire que F admet une limite finie à gauche en 1.
   (d) Calculer $F'(x)$.
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée
   $$I=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) Montrer que F est une primitive sur $]0,1[$ de la fonction $f:t\longmapsto\frac{t-1}{\ln t}$.
   (c) En déduire la valeur de I.

28 Soit la fonction $F:x\longmapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de F. Calculer $F(0)$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\quad F(x)\leqslant\frac{1}{x}$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction F.

29 Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, l'intégrale I_n est-elle convergente ? Calculer I_2
2. En utilisant le théorème de convergence dominée, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

30 *Théorème de convergence dominée* .

Dans chacun des cas suivants, prouver la convergence de la suite (I_n) et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$:

(a) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n t\,\mathrm{d}t$

(b) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1+\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^{n+2}}\,\mathrm{d}t$

(d) $I_n=\int_0^1\frac{n(x+x^2)}{1+nx}\,\mathrm{d}x$

(e) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\star\ I_n=\int_0^{+\infty}\exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$

(g) $\star\ I_n=\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{x^n}\right)\mathrm{d}x$

(h) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{n}{t(1+t^2)}\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t$
en justifiant d'abord que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ 0\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$

31

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\arctan(nt)\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{n}} \arctan x \, dx$$

32 Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mu_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mu_n = \int_0^1 f(nt)\,dt$
2. En déduire la convergence et la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2 Pour approfondir

33 1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Démontrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est convergente.

On définit la fonction F sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

2. (a) Soit $x > 0$. Montrer que $F(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$.
   (b) En déduire la limite de F en 0^+.
3. (a) Soit $x > 0$. Montrer que $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$
   (b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. On se fixe un réel $x > 0$.
   (a) Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Effectuer le changement de variable $u = x + t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$
   (b) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de e^x et de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$
5. Démontrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

34 Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.
2. Monter que l'intégrale généralisée $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,dx$ converge.
3. Prouver, par changements de variable, que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos t}{t}\,dt$$
4. (a) Montrer que la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{\cos(t) - 1}{t}$ se prolonge par continuité en zéro.
   (b) ⋆ En introduisant une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, déterminer la valeur de $I(a,b)$.

3 TP sous Maxima

35 *On utilisera :* `integrate`, `float`, `diff`, `assume`, `limit`, `ode2`, `ic1`.

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt}\,dt$

1. Démontrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt$ est convergente.
2. Préciser l'ensemble de définition I de f. Donner la valeur exacte de $f(1)$ et une valeur approchée à 10^{-4} près.
3. On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   Calculer $f'(x)$ sous la forme d'une intégrale.
4. On se fixe un réel x appartenant à I.
   (a) Proposer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \ln(t)$.

(b) Donner $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) - t$ et $\lim_{t\to+\infty} t\ln t\,\mathrm{e}^{-xt}$.

(c) ⋆ En effectuant une intégration par parties sur $\int_\varepsilon^A \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$,

$$\text{montrer que}\quad f(x) = -xf'(x) - \frac{1}{x}$$

5. Déduire de la question précédente que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
6. Expliciter $f(x)$ pour $x \in I$.

4 Pour travailler seul

36

1. Soit α un réel strictement positif.
Pour quelles valeurs de α, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}$$

(b) Calculer u_1 en remarquant que pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

(c) En déduire u_2 et u_3.

3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) établir que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

(c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

37

1. Justifier, pour tout réel $x > 0$, la convergence de l'intégrale

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $x > 0$.

(a) Montrer, par une intégration par parties, que

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant J(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

(b) En déduire un équivalent simple de $J(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. (a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $\quad J(x) = -\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + J(1)$

(b) Prouver que J est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $J'(x)$.

(c) En déduire les variations de J sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Préciser la limite de J en zéro.

Déterminants

1 Pour s'entraîner

38 Donner, sans calcul, la valeur de chaque déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2} & 0 & -12 \\ 0 & \pi & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -6 & 4 & -10 \end{vmatrix}$$

39 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

40 Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin b \\ \sin a & \cos b \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

41 Soient a, b et c trois complexes. On pose $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

1. Calculer le déterminant Δ en fonction de a, b et c.
2. On suppose dorénavant que a, b et c sont les racines du polynôme $P(X) = X^3 - X + 1$.
   (a) Donner la forme factorisée du polynôme $P(X)$ en fonction de a, b et c.
   (b) En déduire la valeur de Δ.

42 Calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

43

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

44 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(M)$.
2. Déterminer les valeurs de a pour que la matrice M soit inversible.

45 Calculer le déterminant de chacune des cinq matrices suivantes, en déduire celles qui sont inversibles et le cas échéant déterminer leur inverse par la méthode de la comatrice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

46 Soient deux matrices A et B inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $AB + BA = 0_n$. Démontrer que n est pair.

47 Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que la famille

$$\mathscr{F} = ((1,1,a);(1,a,1);(a,1,1))$$

soit une base de $\mathbb{R}^3$.

48 Calculer le déterminant de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ dans chacun des cas suivants et préciser si u est un automorphisme.

a. $u : P \mapsto XP' + P(1)$ **b.** $u : P \mapsto P(X+1) - P(X)$

49 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

et soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'ensemble des réels λ tels que $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ne soit pas un automorphisme.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

50 Sans le calculer, montrer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13 (on remarquera que 156, 260 et 325 sont divisibles par 13).

51 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_3 = 0_3$. Calculer A^3, et en déduire $\det(A)$.

52 Le plan usuel orienté est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux deux vecteurs non nuls du plan.
   (a) Rappeler la formule d'addition $\sin(b-a)$ pour a et b réels.
   (b) En notant $\mathscr{B}$ la base $(\vec{i},\vec{j})$, démontrer que
   $$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$
2. Étant donnés trois points non alignés A, B et C, montrer que le triangle ABC a pour aire $\frac{1}{2}\left|\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$
3. On prend comme points $A(-1,2)$; $B(1,-2)$ et $C(2,3)$.
   Calculer l'aire du triangle ABC.

53 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1;2)$, $B(4;4)$ et $C(5;-2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. (a) Calculer l'aire du triangle ABC.
   (b) En déduire la longueur h_C de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

54 On se place dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Vérifier que les trois points A, B, C de coordonnées respectives $(2,0,1)$; $(3,1,1)$; $(1,-2,0)$ ne sont pas alignés.
Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les trois points A, B et C.

55 L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la droite d_1 passant par O, dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;m;2)$ et la droite d_2 passant par $A(m;1;-m)$, dirigée par le vecteur $\vec{v}(1;m;5)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que d_1 et d_2 soient coplanaires. Déterminer alors une équation cartésienne du plan qui les contient.

2 Pour approfondir

56 Calculer le déterminant d'ordre n suivant (où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

57 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soient a et b deux réels tels que $a \neq b$. On pose pour tout réel x,

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & x & a+x & \ddots & \vdots \\ b+x & \ddots & \ddots & \ddots & a+x \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & b+x & x \end{vmatrix}$$

1. Démontrer que la fonction $x \longmapsto D_n(x)$ est affine.
2. Calculer $D_n(x)$ pour tout réel x. En déduire $D_n(0)$.

58 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Pour tout réel x, on considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3.

2. En développant ce déterminant par rapport à sa première colonne, exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2}
3. Montrer que la suite de terme général $u_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$ est géométrique et préciser sa raison.
4. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de x et de n.
5. Calculer la somme $\sum_{k=3}^{n} u_k$, en déduire l'expression de Δ_n.

59 Soit n un entier supérieur à 2.
Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général :

$$a_{i,j} = \max\{i\,,\,j\}$$

60 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $V = \left\{x \longmapsto \mathrm{e}^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\right\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $d : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant. d est-elle bijective ?

61

1. Soit p un entier supérieur à 2. Calculer le déterminant d'ordre p suivant :

$$\delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Soit n un entier supérieur à 3.
On considère la matrice $A = \left(|i-j|\right)_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant n}$
   (a) Écrire A sous la forme d'un tableau de nombres.
   (b) En effectuant des opérations élémentaires d'abord sur les colonnes, calculer $\det(A)$ en utilisant le résultat de 1.

3 TP sous Maxima

62 *Matrices de Vandermonde. On utilisera :*
`length, addcol, transpose, for..from..thru..do, factor, determinant`

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
On appelle matrice de Vandermonde de la lise $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matrice carrée suivante :

$$V_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Écrire une fonction vand(L) qui renvoie la matrice de Vandermonde $V_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$ avec comme argument une litse `L=[a1,a2,...,an]`.
2. Calculer sous forme factorisée les déterminants des matrices de Vandermonde $V_{(a,b,c)}$ et $V_{(a,b,c,d)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $V_{(a,b,c,d)}$ soit inversible.
3. Conjecturer la forme factorisée du déterminant de Vandermonde : $\det\left(V_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}\right)$.
Prouver cette conjecture.

4 Pour travailler seul

63 Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 6 & x \end{pmatrix}$

   Déterminer les nombres réels x pour lesquels la matrice $M(x)$ est inversible.

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & z-1 \\ 1 & z & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

   Pour quelles valeurs de z la matrice M est-elle inversible ?

3. Soit $N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que $N^3 = -I_3$. Que vaut $\det(N)$?

4. On pose $A = \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

   Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice A.

Séries

1 Pour s'entraîner

64 On admet que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
Justifier la convergence et déterminer la somme des séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

65 *Séries téléscopiques* . En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de termes généraux suivants sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme :

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},\ n\in\mathbb{N}^*\ ;\quad v_n=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right),\ n\geqslant 2$$

$$w_n=\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)},\ n\geqslant 2\ ;\quad x_n=\frac{1}{n^2+2n},\ n\geqslant 1$$

66 Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$\sum\frac{4}{5^n}\ ;\quad \sum\frac{2^n}{n!}\ ;\quad \sum\frac{3n}{5^n}\ ;\quad \sum\frac{3^{2n+1}}{n!}$$

67 Étudier la convergence et déterminer la somme de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum\frac{n+1}{3^n}$

(b) $\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

(c) $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

(d) $\sum\frac{n+1}{n!}$

68 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On pose pour tout entier n, $v_n=\ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}u_k=v_0-v_{n+1}$
4. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

69 Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n=\frac{2n}{n^2+3n+5}$
2. $u_n=e^{1-\frac{1}{n}}$
3. $u_n=\frac{\arctan n}{n^3}$
4. $u_n=\frac{1}{\sqrt{1+2+\cdots+n}}$
5. $u_n=e^{\frac{1}{\sqrt{2n}}}-1$
6. $u_n=\frac{\ln n}{n^4}$
7. $u_n=2^{2n-1}\mathrm{e}^{-n}$
8. $u_n=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
9. $u_n=1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$
10. $u_n=\frac{n^2\ln n}{\mathrm{e}^n}$

70 Pour tout $n\geqslant 2$, on pose

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

1. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2}u_n$.

71 Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$. Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{a^n}{1+a^n}$ suivant les valeurs de a.

72
1. Étudier rapidement la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln x}$
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln n}$
3. (a) Comparer $n!$ et n^n
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\ln(n!)}$

73 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
1. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Pour $k \geqslant 1$, comparer $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.
3. En déduire un encadrement de S_n, puis un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{\alpha} S_n$.

74
1. Soit $n \geqslant 1$. Rappeler pourquoi la quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$ est bien définie.
2. Soient n et p deux entiers tels que $2 \leqslant n < p$.
   Encadrer la somme $\sum_{k=n+1}^{p} \dfrac{1}{k^3}$ par deux intégrales.
3. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

75 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs.
1. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.
2. Que dire de la réciproque de cette propriété ?
3. Le résultat subsiste-t-il si la suite (u_n) est de signe quelconque ?

76 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Démontrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

77
1. Soient a et b deux réels positifs. Comparer $2\sqrt{a\,b}$ avec $a+b$
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente.
   (a) Montrer que la série de terme général $v_n = \sqrt{u_n\,u_{n+1}}$ est convergente.
   (b) ⋆ La réciproque est-elle vraie ?

78 On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$
1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n$.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

79
1. Rappeler le développement limité à l'ordre trois au voisinage de zéro de la fonction sinus.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

80 On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$
2. Proposer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

81 Soient a et b deux réels. Discuter suivant les valeurs de a et b la convergence de la série $\sum u_n$, avec

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n}.$$

82 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$$

1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de $n\,u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

83
1. Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$
2. Étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{3^n n!}{n^n} \qquad \sum \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{n^n}$$

84 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^3}$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant n \ln n$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n^2}$
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$

85 Déterminer la nature de chacune des séries :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)\cos n}{n^2\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

86 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

1. Montrer que $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$.
2. (a) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$?

   (b) Déterminer le signe et un équivalent de $w_n = u_n - v_n$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$.

   (c) En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$. Qu'illustre cet exercice ?

87 On se propose d'étudier la nature de la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$
2. Déterminer la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin(u_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3. En déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

88

1. Établir la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
   Est-elle absolument convergente ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que pour tout réel t,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$
3. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. Déduire des deux questions précédentes la somme :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
5. Par une méthode analogue, calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$

2 Pour approfondir

89 *Vers la formule de Stirling* .
On définit les suites (u_n) et (w_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n!\,\frac{e^n}{n^n}\,n^{-1/2} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.
   (b) Donner un équivalent simple de w_n lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire la nature de la série $\sum w_n$
4. Démontrer qu'il existe une constante réelle $\lambda > 0$ telle que
$$n! \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
5. APPLICATION : étudier la nature de la série de terme général
$$a_n = \frac{n^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-n}$$

90 *Final 2020* .

1. (a) Déterminer $\lim_{u\to+\infty} u^{3/2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\right)$
   (b) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est convergente.
2. On se fixe un réel x strictement positif.
   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est convergente.
3. Pour tout réel x strictement positif, on pose $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\sqrt{k}}$
   Montrer que la fonction S est décroissante sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.
4. On se fixe un réel $x > 0$. On admet que la fonction $f : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (a) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire par un changement de variable, que
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant S(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
5. On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.
6. (a) Prouver que pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant S(x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^k$
   (b) En déduire un équivalent simple de $S(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$

3 TP sous Maxima

91 *On utilisera :* `sum, simplify_sum, factor`

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

92 *On utilisera :* `sqrt, taylor, solve, sum`

Soit a, b et c trois nombres réels. On pose pour tout naturel n,

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

1. Donner le développement asymptotique à trois termes de u_n au voisinage de $+\infty$.
2. $\star$ En déduire les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ est convergente.
3. Calculer alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4 Pour travailler seul

93 Les six questions sont indépendantes

1. Combien vaut la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k}$?
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir la convergence de cette série ?

   (a) $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ (b) $u_n^2 \leqslant \dfrac{1}{n}$ (c) $\sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (d) $e^{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

3. Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

   (a) $\sum \dfrac{1}{n^3}$ (b) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ (c) $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ (d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

4. Pour laquelle des séries suivantes, la règle de D'Alembert permet-elle de justifier la convergence ?

   (a) $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ (b) $\sum \dfrac{n}{2^n}$ (c) $\sum \dfrac{\sin n}{n!}$ (d) $\sum \dfrac{1}{n^2}$

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général $\dfrac{\sinh(n)}{a^n}$ soit convergente.
6. Parmi les 4 séries suivantes, une seule est divergente. Indiquer laquelle.

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ (c) $\sum \dfrac{(-2)^n}{n!}$ (d) $\sum \dfrac{n+1}{2^n}$

94 On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge.

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ appartient à E.
2. Montrer que, si u et v sont deux suites de E, alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ est absolument convergente.
3. En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

95 *Final 2013* . La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ est semi-convergente.

On appelle «reste d'ordre n» de la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$, le nombre réel

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir un équivalent de R_n, reste d'une série alternée convergente.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$2R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \right| \leqslant \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$

3. Déterminer un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Diagonalisation

1 Pour s'entraîner

96 On considère les deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants.
2. Vérifier que B n'a pas de valeur propre réelle, mais qu'elle a deux valeurs propres complexes que l'on déterminera.

97 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = (X+1)P$. Déterminer les éventuelles valeurs propres de f.

98 Montrer qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

99 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.
3. Déterminer les valeurs propres de A.

100 Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -2 et 0.

1. Écrire le polynôme caractéristique de M. Est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer la trace de M.
3. Donner $\det(M)$. M est-elle inversible ?
4. Quel est le rang de $M + 2I_2$?

101 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner le rang et le déterminant de J.
2. Exprimer J^2 en fonction de J.
3. En déduire les valeurs propres de J et la dimension de chaque sous-espace propre associé.

102 Soient n un entier supérieur à 2 et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + 2M = 3I_n$

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 + 2X - 3$
2. Que peut-on dire des valeurs propres réelles de la matrice M ?
3. Déterminer la seule matrice possible M.

103 Expliquer sans calcul pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & -2 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

104 On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de M.
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$D = P^{-1}MP$$
3. Calculer P^{-1} et expliciter M^n pour tout entier naturel n.

105 Diagonaliser si possible les matrices ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

106 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible, donner A^{-1} et A^{2021}.
2. Déterminer les valeurs propres de A sans calculer son polynôme caractéristique. Justifier que A est diagonalisable.
3. Diagonaliser A en donnant la matrice de passage P et son inverse P^{-1}.

107 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Donner les valeurs propres de A.
2. Pour quels réels α la matrice A est-elle diagonalisable ?

108 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A si possible.
2. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

109 Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ?

110 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X^2+1)P' - 2XP.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer les valeurs de propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer les vecteurs propres de f.

111 On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = MP$.

1. Donner la matrice de Φ relativement à la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire le rang de Φ, son image et son noyau.
3. Diagonaliser sans calcul, Φ.

112 On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A, puis justifier que A est diagonalisable.

   (b) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter A^n en fonction de n.

2. On définit les suites (u_n) et (v_n) par leurs premiers termes $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n + 4w_n \end{array} \right. \quad \text{On pose } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, le vecteur X_{n+1} en fonction de A et de X_n.

   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de n.

   (c) Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

113 1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Diagonaliser la matrice A et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Exprimer X_n en fonction de X_0, A et n.
En déduire la formule explicite de u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.

114 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé A.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Chercher deux vecteurs propres de φ linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de φ dans cette base.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

115 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Démontrer que A admet une seule valeur propre.

   (b) Déterminer le sous-espace propre de A associé à l'unique valeur propre. A est-elle diagonalisable ?

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.

3. (*) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer T^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

116 Déterminer dans chaque cas le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0=1$, $u_1=2$, $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$;
2. $u_0=1$, $u_1=0$, $u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$;
3. $u_0=0$, $u_1=1$, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. $u_0=5$, $u_1=1$, $u_{n+2}=-4u_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

117 Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère le déterminant de taille n suivant :

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3\end{vmatrix},$$

avec la convention $D_0=1$. On a de plus $D_1=3$.

1. Calculer $D_2=\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}$ et $D_3=\begin{vmatrix}3&1&0\\2&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}$.
2. Démontrer que pour tout entier n, on a $D_{n+2}=3D_{n+1}-2D_n$.
3. En déduire l'expression de D_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2 Pour approfondir

118 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}2&a&0\\0&1&b\\0&0&2\end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

119 Donner une CNS portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&2&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

120 Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&2&0\\-6&0&6\end{pmatrix}$

1. (a) Justifier rapidement que A est diagonalisable.
   (b) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P et la matrice diagonale D semblable à A.
2. Soit $M\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2+M=A$.
   (a) On pose $N=P^{-1}MP$. Montrer que $DN=ND$.
   (b) En posant $N=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}$, justifier que N est diagonale.
3. À l'aide du logiciel MAXIMA, donner toutes les matrices $M\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2+M=A$

121 On pose $A=\begin{pmatrix}5&3\\1&3\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Combien y a-t-il de matrices $M\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2=A$?

122 Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$f(P)=\frac{1}{2}(X^2-1)P''-XP'+P$$

1. Pour tout entier $k\in[\![0,n]\!]$, calculer $f(X^k)$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Dans cette question seulement, on suppose $n = 3$.
   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Montrer que f est un projecteur.
   Préciser son noyau et son image.
4. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, 1+X^2)$.
5. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   ⋆ L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

123 *Matrices diagonalisables de rang égal à 1.*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de A.

1. ⋆ En remarquant que les colonnes de A sont colinéaires à C, démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telle que $A = CL$.
2. Vérifier que $LC = \operatorname{Tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \operatorname{Tr}(A)A$ où $\operatorname{Tr}(A)$ désigne la trace de A.
3. En déduire un polynôme annulateur de A ainsi que les éventuelles valeurs propres de A.
4. Le nombre 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension du sous-espace propre associé ?
5. Vérifier que $\operatorname{Tr}(A)$ est valeur propre de A.
6. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.
7. *Application* : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?
   Donner des vecteurs propres associés.

3 TP sous Maxima

124 Soient a, b et c trois nombres réels. On pose $A = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Calculer les valeurs propres de A.

125 Maxima peut calculer la puissance d'une matrice carrée lorsque l'exposant est connu (par exemple A^2 ou A^5 où A est une matrice carrée donnée). Mais le logiciel ne sait pas donner directement l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel pour un entier naturel n quelconque. Pour aider Maxima à le faire dans le cas d'une matrice diagonalisable A, on suit les étapes suivantes :

(i) On diagonalise A en donnant la matrice de passage P de la base canonique vers une base de vecteurs propres de A, et la matrice diagonale correspondante D telles que $A = PDP^{-1}$.

(ii) On donne directement D^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

(iii) On obtient A^n à l'aide la formule $A^n = PD^nP^{-1}$.

On utilisera : `charpoly`, `eigenvectors`, `transpose`, `ratsimp`

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la matrice A soit diagonalisable.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque A est diagonalisable, écrire A^n sous la forme d'un tableau matriciel à 9 coefficients.
   On pourra introduire $s = a + b + c$.

4 Pour travailler seul

126 *Final 2019* .

Soit k un nombre réel fixé tel que $k \neq -1$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.
   Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
3. Donner une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

127 *Final 2018* .

Soient a, b, c trois réels **tous non nuls**. On considère la matrice M carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et donner le nombre réel k tel que $M^2 = kM$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de M.
   Quelles sont les éventuelles valeurs propres de M ?
2. Déterminer le rang de M. En déduire une valeur propre de M.
3. On admet que M a deux valeurs propres distinctes.
   (a) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de M.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}
   (b) Diagonaliser la matrice M en l'exprimant en fonction de P, D et Q.

128 *Final 2021.*

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle «*trace* de M», notée $\mathrm{Tr}(M)$, le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \qquad \text{(somme des coefficients diagnoaux de } M\text{)}$$

On considère l'application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \mathrm{Tr}(M) I_n + M$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note $T : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $T(M) = \mathrm{Tr}(M)$.
   Montrer que le rang de T est égal à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$.
3. On suppose *dans cette question uniquement*, que $n = 2$.
   On rappelle que la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ avec :
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
   Calculer le déterminant de f.
4. On revient au cas général où n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.
   (a) Calculer $f(I_n)$. En déduire une valeur propre de f.
   (b) Prouver que 1 est valeur propre de f et donner la dimension du sous-espace propre $E_1(f)$ associé en utilisant le résultat de la question 1.(b)
5. ⋆ Déduire des questions 4.(a) et 4.(b) que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Produit scalaire

1 Pour s'entraîner

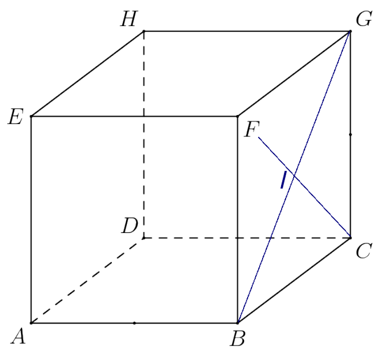
129

1. Le plan géométrique euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

   On pose $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Déterminer une valeur approchée à 1° près de la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right)$.

2. Dans l'espace, on se donne un cube $ABCDEFGH$. Soit I le point d'intersection des droites (BG) et (FC).

   Calculer une valeur approchée à un degré près de l'angle géométrique $\widehat{AIE}$.



130 On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on définit l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\left\|1 + X^2\right\|$.
3. Montrer que la famille $\left(1, X, X^2 - \dfrac{2}{3}\right)$ est orthogonale.

131 Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel. Démontrer que

$$\|2u + 3v\| = \|2u - 3v\| \iff u \perp v.$$

132 On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel $F = \left\{(x,y,z,t) \in E, \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}\right\}$.

1. Déterminer une base de F.
2. Déterminer une base de $F^{\perp}$.

133 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On munit E du produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P;Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$. Déterminer une base de $F^{\perp}$.

134 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Étudier le cas d'égalité.
2. On suppose ici que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k > 0$, et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$. Préciser le cas d'égalité.

135 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

136 Soit $E=\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit
$$\varphi:\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\|g\|$ pour $g:t\mapsto e^t$.
3. (a) Prouver que, pour $f\in E$, $\displaystyle\left(\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ?

137 Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On pose $\sigma=ab+bc+ca$, $S=a+b+c$ et

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer le déterminant de A en fonction de S et de σ.
2. On suppose dans cette question, que $a^2+b^2+c^2=1$.
   (a) Vérifier que $\det(A)^2=(1+2\sigma)(1-\sigma)^2$
   (b) Montrer, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $|\sigma|\leqslant 1$
   (c) En déduire que $|\det(A)|\leqslant 1$
3. Une matrice carrée $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^tM\,M=I_n$.
   Montrer que A est orthogonale ssi $\sigma=0$ et $S\in\{-1;1\}$.

138 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u,v,w) avec

$$u=(1,0,-1)\quad;\quad v=(-1,2,3)\quad;\quad w=(1,1,1)$$

139 Pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(x,y)=2x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+3x_2y_2.$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, puis orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire.

140 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.
Soit $u=(1,0,0,1)$ et $v=(0,1,0,1)$. On pose $F=\mathrm{Vect}(u,v)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer la distance du vecteur $(1,2,3,4)$ au sous-espace F.

141 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, on considère le plan vectoriel F d'équation $2x+y-z=0$.
On pose $\overrightarrow{u}=(1,2,1)$. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{u}$ sur le plan F.

142 Soit E un espace euclidien et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de E.
Soit $H=\left(\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{n}\}\right)^{\perp}$ et p_H la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que
$$\forall x\in E,\qquad p_H(x)=x-\frac{\langle x\mid\overrightarrow{n}\rangle}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}$$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, H est le plan d'équation $x-2y+z=0$. Donner la matrice de p_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Diagonaliser sans calcul cette matrice.

143 On se place dans $E=\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall (P,Q)\in E\times E,\quad \langle P;Q\rangle = P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2).$$

1. Déterminer une base orthonormée de $F=\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur F, ainsi que la distance de X^2 à F.

144 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathscr{B}=(e_0,e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ (i.e. $e_0=1$, $e_1=X$, $e_2=X^2$, $e_3=X^3$). On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$<P\mid Q>=\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base *orthogonale* de $\mathbb{R}_3[X]$.

145 *Avec un logiciel de calcul formel.* Soit $E=\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.

1. Vérifier que l'application $\varphi:(f,g)\longmapsto\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ où $u_1:t\mapsto t$ et $u_2:t\mapsto 1$. Construire une base orthonormale de F.
3. Calculer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^t-at-b\right)^2\mathrm{d}t$

146 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et on définit l'application

$$\begin{array}{rccl}\varphi & : & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$$

On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels de E constitués respectivement des fonctions polynomiales paires et impaires.

1. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Prouver que si $g\in\mathscr{P}$ et si $h\in\mathscr{I}$ alors $\varphi(g,h)=0$.
3. À toute fonction f de E on associe la fonction

$$\begin{array}{rccl}\widehat{f} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))\end{array}$$

   (a) Vérifier que $\forall f\in E,\quad \widehat{f}\in\mathscr{P}$ et que $\forall f\in E,\quad \big(f-\widehat{f}\,\big)\in\mathscr{I}$

   (b) En déduire que l'application $p:f\longmapsto\widehat{f}$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de E à préciser.

2 Pour approfondir

147 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A,B)\longmapsto\langle A\mid B\rangle=\mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
   On notera $\|A\|=\sqrt{\langle A\mid A\rangle}$ la norme associée.
2. Calculer $\langle I_n\mid A\rangle$ et montrer que pour toute matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(A)\leqslant\sqrt{n}\,\|A\|$$

3. On pose $H=\{M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\mid \mathrm{Tr}(M)=0\}$.

   (a) Vérifier que $H=\mathrm{Vect}(I_n)^{\perp}$.

   (b) On désigne par J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

148 Soit $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. On se place dans $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $I=I_n$.

1. (a) Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \langle A \mid B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t A\, B) \end{array}$$

est un produit scalaire sur E.

   (b) Pour $M\in E$, que vaut $\langle M \mid I\rangle$?

2. On désigne par J la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. On pose $F = \mathrm{Vect}(I,J)$.
   (a) Calculer J^2 en fonction de J. En déduire $\langle J \mid J\rangle$.
   (b) On note $P_F(M)$ le projeté orthogonal sur F d'une matrice $M\in E$.
   En remarquant que $\langle M \mid J\rangle = \langle p_F(M) \mid J\rangle$, exprimer $p_F(M)$ comme combinaison linéaire de I et J en fonction de $\mathrm{tr}(M)$ et du réel $\mu = \langle M \mid J\rangle$.
   (c) Calculer μ en fonction des coefficients de M.

149 *Final 2019* .

On note E l'ensemble des suites $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

1. (a) Prouver que pour tous réels x et y, $\quad |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$
   (b) En déduire que si $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites appartenant à E, alors la série $\sum u_n w_n$ est absolument convergente.
2. On admet que E, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On considère l'application φ qui associe à tout couple $(\mathbf{u},\mathbf{w})\in E^2$, le nombre réel

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n$$

   (a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$
   (b) Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E.
   Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{2^n}$ appartient à E.
   En déduire la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{2^n}$.
   (c) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer le plus petit réel $A>0$ tel que

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant A\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$$

150 Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle fermé $[0,+\infty[$.
On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire telles que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Prouver que pour tous réels a et b, $\quad |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une fonction intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g)\in E^2$ associe le réel : $\varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \mid \rangle$.
4. Soit $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que pour toute fonction $f\in E$,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Partie B : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t\longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $f_2 : t\longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$

1. Justifier que f_1 et f_2 sont des éléments de E.
2. Construire une base orthonormale $\mathscr{B} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ de E.

3. On admet que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$
   Calculer les deux réels a et b minimisant l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t} - a\,\mathrm{e}^{-t} - b\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

151 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle f(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$$

1. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est symétrique.
2. Démontrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

3 TP sous Maxima

152 *On utilisera :* `integrate, length, sqrt, for..from..thru..do, sum, append, ratsimp`

On munit l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :
$$(f,g) \longmapsto \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Créer une fonction `ps(expr1,expr2)` qui calcule l'intégrale
$$\int_0^1 \texttt{expr1} \times \texttt{expr2}\,\mathrm{d}t$$
   dans laquelle `expr1` et `expr2` sont deux expressions de la variable désassignée t.
2. Soit $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille libre de fonctions de E.
   Écrire une procédure `orthom(famille)` prenant en paramètre une liste d'expressions $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ de la variable désassignée t et qui renverra la famille orthonormale associée à $\mathscr{F}$ obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt.

3. On note h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(t) = \begin{cases} t\ln t & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
   (a) Justifier que $h \in E$.
   (b) On pose $\displaystyle\delta = \min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 t^2\left(\ln(t) - a - b\,t^3 - c\sqrt{t}\right)^2 \mathrm{d}t$
   Déterminer le sous-espace vectoriel F de E tel que $\delta = d(h,F)^2$.
   ⋆ En déduire la valeur exacte de δ sans chercher à calculer les réels a, b et c réalisant le minimum.

4 Pour travailler seul

153 *Final 2015* .

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,1,1)$ et $v = (1,2,3)$.

1. Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F.
   Compléter cette base en une base orthonormale directe $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection orthogonale sur F.
   (a) Déterminer la matrice A de p dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
   (b) Calculer la distance du vecteur e_1 au sous-espace F.

154 *Final 2018* .

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application φ définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. On notera dorénavant $\langle P \mid Q\rangle$ au lieu de $\varphi(P,Q)$.
   On désigne par $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
   On rappelle que F est de dimension 2.
   Vérifier que $(\mathbb{1}, X)$ est une base orthonormale de F.

3. (a) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel F.
   (b) En déduire la distance $d(X^2, F)$ du polynôme X^2 au sous-espace vectoriel F.
4. Trouver un troisième polynôme Q_3 tel que $(\mathbb{1}, X, Q_3)$ soit une base orthonormée de E.

155 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E \times E$ l'application

$$\varphi : (P,Q) \longmapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Vérifier que (E, φ) est un espace euclidien.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2+1)$. Déterminer $F^\perp$.
3. Par le procédé de Gram-Schmidt, obtenir une base orthonormée de E.
4. Déterminer $G^\perp$ lorsque $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G.

156

1. Déterminer la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.
2. Diagonaliser cette matrice A.

Équations différentielles linéaires

1 Pour s'entraîner

157 Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $y' - \dfrac{1}{t^2+1} y = 0$, $I = \mathbb{R}$.
2. $t^2 y' - y = 0$, $I =]0;+\infty[$.

158 Résoudre :

1. $\begin{cases} y' + 3y &= 2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$
2. $y' + y = e^t$
3. $\sqrt{1-t^2}\, y' - y = 1$ sur $]-1,1[$.

159 *Variation de la constante.*
Résoudre sur $]0,+\infty[$ chacune des équations différentielles suivantes :

(a) $ty' - y = t^2 + 1$

(b) $t y' + y = \sin t$

(c) $(t^2+1)y' + 2ty = \dfrac{1}{t}$

(d) $2t y' + y = \dfrac{1}{1+t}$

160 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} t y' - 2y = t^2 \ln t \\ y(e) = 0 \end{cases}$.

161 On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 y' + (t-1)y = 0$

1. Résoudre (E) sur $I_1 = \mathbb{R}^{+*}$ et sur $I_2 = \mathbb{R}^{-*}$.
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

162

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $ty' - y = t$.
2. Vérifier que toutes les solutions de l'équation différentielle précédente peuvent se prolonger en une fonction continue sur $[0;+\infty[$. Le prolongement obtenu est-il dérivable sur $[0;+\infty[$?

163

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis sur $\mathbb{R}^{-*}$ l'équation différentielle : $t y' + y = t^2 - 1$
2. Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ t f'(t) + f(t) = t^2 - 1$$

164 On considère l'équation différentielle (E) : $t y' + 2y = \dfrac{t}{t^2+1}$

1. Déterminer la solution générale de (E) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0,+\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.
2. (a) Calculer le développement limité d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction arctan.
   (b) Montrer qu'il existe une unique solution φ de (E), définie sur $\mathbb{R}$.

165 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables, telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

166 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \cos x$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

167 Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + e^{-t^2} y = 0$ a pour limite 0 en $+\infty$.

168

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Résoudre le système différentiel suivant où x, y, z désignent les fonctions inconnues à valeurs réelles :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y+z \\ y' & = & x+z \\ z' & = & x+y \end{array} \right.$$

169 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels suivants (où les fonctions inconnues x et y sont à valeurs réelles) :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \\ x(0) = 1\,,\ y(0) = -5 \end{array} \right.$$

170 Déterminer les solutions **réelles** des systèmes différentiels suivants.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y - 3 \\ y' = -2x + 3y + 1 \end{array} \right.$$

171 On considère le système différentiel linéaire

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{x}' & = & 3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' & = & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ désignent des fonctions inconnues de la variable réelle t, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \end{pmatrix}$.
   Écrire le système (S) sous la forme $X' = AX$, avec $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
   A est-elle diagonalisable ?
   Déterminer une matrice triangulaire supérieure T semblable à A.
3. Résoudre le système (S).

172 Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x' = -t\,y \\ y' = t\,x \end{array} \right.$, où les fonctions x et y sont à valeurs réelles. On pourra poser $z = x + i\,y$.

173 Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + y + 2t \\ y' & = & -x + 3y + 1 \end{array} \right.$$

On pourra poser $z = x - y$ et déterminer une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 dont z est solution.

174 Pour tout réel t, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$

1. Déterminer les éléments propres de la matrice $A(t)$.
   En déduire que $A(t)$ est diagonalisable.
   On explicitera la matrice de passage $P \in GL_2(\mathbb{R})$.
2. Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{x}' & = & (1-3t)\mathbf{x} + 4t\,\mathbf{y} \\ \mathbf{y}' & = & -2t\,\mathbf{x} + (1+3t)\mathbf{y} \end{array} \right.$$

175 On considère le système différentiel :

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2t\,x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & x(t) + 2t\,y(t) + z(t) \\ z'(t) & = & x(t) + y(t) + 2t\,z(t) \end{array} \right.$$

1. Écrire le système (Σ) sous forme matricielle : $X'(t) = A(t)X(t)$.
2. Déterminer une matrice inversible P (qui ne dépend pas de t) et une matrice diagonale $D(t)$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P\,D(t)P^{-1}$.
3. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Vérifier que $(\Sigma) \iff Y'(t) = D(t)Y(t)$.
4. En déduire les solutions du système (Σ).

176 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $y'' - 5y' + 6y = 1 + t^2$
3. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-t}$
4. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}$
5. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2t}$
6. $y'' + y' + y = t^2 + \mathrm{e}^{t}$

177 *Équation d'Euler par changement de variable.*
Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
On considère sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle (E) :

$$a\,t^2\,y''(t) + b\,t\,y(y) + c\,y(t) = 0$$

1. On pose pour tout réel x, $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $y(t) = z(\ln t)$. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, que l'on précisera.
2. *Applications*. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes sur sur $\mathbb{R}^{+*}$:

   (a) $t^2\,y''(t) = 6\,y(t)$ (b) $t^2\,y''(t) - 3t\,y'(t) + 5\,y(t) = 0$

178 Soit l'équation différentielle $(E) : t^2y'' - 2y = 3t^2$ sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$.

1. On considère sur I l'équation homogène associée $(H) : t^2y'' - 2y = 0$.
   (a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (H).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (H).
2. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $f : t \mapsto P(t)\ln t$, où P est un polynôme du second degré. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.

179 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = f(\pi - t). \quad (\star)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant $(\star)$.

2 Pour approfondir

180 *Solution périodique.* Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) : y' + a\,y = b(t)$$

1. Prouver que si f est une solution de (E) alors la fonction $g : t \mapsto f(t + 2\pi)$ l'est aussi.
2. En déduire qu'une solution f de (E) est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$.
3. (a) Montrer que si f est solution de (E), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(\lambda + \int_0^t b(u)\mathrm{e}^{a\,u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-a\,t}$$

   (b) Déduire des questions 2. et 3.(a), que (E) admet une unique solution 2π-périodique.

181 *Méthode de Lagrange.*
On considère l'équation différentielle linéaire homogène (H) :

$$(1+t^2)y''-2y=0$$

1. Proposer une solution «évidente» f de (H), polynomiale de degré 2.
2. On cherche une autre solution g de (H), linéairement indépendante de f, sous la forme $g : t \mapsto C(t)f(t)$.
   Montrer que g est solution de (H) si, et seulement si, la dérivée C' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, que l'on précisera.
3. Résoudre (H).
4. Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+t^2)y''-2y=t$

182 *Avec une équation d'Euler.*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $t^2y''(t)+y(t)=0\ (\star)$ en effectuant le changement de fonction inconnue : $z(x)=y(e^x)$.
2. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall t>0,\ f'(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$. Montrer que f est solution de $(\star)$.
3. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ vérifiant

$$\forall t>0,\ f'(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$$

183 *Encore une équation d'Euler.*
On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y''-4ty'+6y=0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.
3. $\star$ Démontrer que l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 3. On pourra en proposer une base.

184 *Par analyse/synthèse.*

1. On définit les fonctions sinh et cosh sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

   Calculer les dérivées premières et secondes de ces deux fonctions.
2. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=e^x$$

185 On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array} \qquad \text{où } \forall t\in\mathbb{R},\ \Phi(f)(t)=f'(t)+t\,f(t)$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que tout nombre réel k est valeur propre de Φ et déterminer le sous-espace propre associé à k.
3. En déduire que si λ est un réel positif, alors λ est une valeur propre de $\Phi\circ\Phi$.
4. Soit $f\in E$. Calculer $[\Phi\circ\Phi(f)](t)$ pour tout nombre réel t.
5. Résoudre l'équation différentielle : $y''+2ty'+(t^2-1)y=0$

3 TP sous Maxima

186 *On utilisera :* `diff`, `ode2`, `taylor`, `limit`, `plot2d`

On considère l'équation différentielle (E) :

$$t^2 y'' + 4t y' + 2t = \ln(1+t)$$

1. Faire résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ par MAXIMA.
2. Déterminer l'unique solution de (E) ayant une limite finie en zéro. On la notera f.
3. Faire tracer le graphe de f sur $[0, +\infty[$.

4 Pour travailler seul

187 Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t^2)y' + y &= 2 \\ y(1) &= 3 \end{cases}$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

188

1. On définit la fonction g sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +\infty[$ par

$$g(x) = x \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\, dt$$

Justifier que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.

2. On considère l'équation différentielle (E_1) : $(1+x)\boldsymbol{y}' = x\,\boldsymbol{y}$ dans laquelle $\boldsymbol{y}$ désigne la fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle I. On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle I,
vérifiant $\varphi(0) = 1$.
   (a) Justifier sans calcul, l'existence et l'unicité de φ.
   (b) Calculer explicitement $\varphi(x)$ en remarquant que
   $\forall x \in I, \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$
3. On considère à présent l'équation différentielle (E_2) :

$$x^2(1+x)\,\boldsymbol{y}'' - x(x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y}' + (x^2+2x+2)\,\boldsymbol{y} = 0$$

   (a) Trouver une fonction affine non nulle y_1 solution de cette équation (E_2).
   (b) On peut obtenir une solution y_2 indépendante de y_1 en la recherchant sous la forme
   $$y_2(x) = \lambda(x)\, y_1(x)$$
   où $\lambda : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue deux fois dérivable sur J. En déduire, à l'aide de la fonction g vue à la question 1., une expression de la solution générale de (E_2) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.